Cours de mathématiques
Classe de première S

Olivier Péault

26 juin 2008

Table des matières

1 Généralités sur les fonctions **4**
1/ Opérations sur les fonctions . . . 4
2/ Sens de variation . . . 5
3/ Représentations graphiques . . . 6

2 Polynômes du second degré **8**
1/ Généralités sur les polynômes . . . 8
2/ Polynômes du second degré . . . 9

3 Dérivation des fonctions **13**
1/ Généralités . . . 13
2/ Calculs de dérivées . . . 14
3/ Applications de la dérivation . . . 18

4 Limites **20**
1/ Limites d'une fonction en l'infini . . . 20
2/ Limite d'une fonction en un point . . . 21
3/ Asymptotes obliques . . . 22
4/ Opérations sur les limites . . . 23

5 Vecteurs de l'espace **25**
1/ Rappels . . . 25
2/ Vecteurs de l'espace . . . 28
3/ Caractérisation vectorielle du parallélisme . . . 30
4/ Repérage dans l'espace . . . 31
5/ Repère orthonormal, distance dans l'espace . . . 33

6 Barycentres **35**
1/ Barycentre de deux points . . . 35
2/ Barycentre de trois points . . . 38
3/ Barycentre d'un nombre quelconque de points . . . 41

7 Produit scalaire **42**
1/ Définition . . . 42
2/ Autres expressions du produit scalaire . . . 42
3/ Règles de calcul . . . 44
4/ Vecteurs orthogonaux . . . 45

8 Applications du produit scalaire **46**
1/ Équations de droites . . . 46
2/ Équations de cercles . . . 47
3/ Longueurs et angles dans un triangle . . . 47

9 Angles orientés **50**
1/ Définitions . . . 50
2/ Propriétés . . . 51

10 Trigonométrie **52**
1/ Lignes trigonométriques . . . 52
2/ Résolution d'équations . . . 54
3/ Repérage polaire . . . 55

11 Suites numériques **56**
1/ Généralités . . . 56
2/ Sens de variation . . . 57
3/ Limites . . . 58
4/ Suites arithmétiques . . . 60
5/ Suites géométriques . . . 61

12 Probabilités **64**
1/ Introduction . . . 64
2/ Vocabulaire des évènements . . . 65
3/ Calcul des probabilités . . . 66
4/ Paramètres d'une loi de probabilité . . . 67
5/ Variables aléatoires . . . 68

13 Transformations du plan et de l'espace **70**
1/ Généralités . . . 70
2/ Propriétés . . . 71
3/ Images des figures usuelles . . . 73

14 Statistiques **75**
1/ Généralités . . . 75
2/ Paramètres de position . . . 76
3/ Paramètres de dispersion . . . 78
4/ Influence d'une transformation affine . . . 80
5/ Résumé d'une série statistique . . . 80

Chapitre 1

Généralités sur les fonctions

1/ Opérations sur les fonctions

a) Égalité de deux fonctions

Définition

Soient u et v deux fonctions. On dit que u et v sont égales et on note $u = v$ si :
– u et v ont le même ensemble de définition D.
– Pour tout $x \in D$, $u(x) = v(x)$.

Exemple : Les fonctions u et v sont-elles égales ?

1/ u et v sont définies par $u(x) = 3 - \dfrac{2}{x+1}$ *et* $v(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$

2/ u et v sont définies par $u(x) = x$ *et* $v(x) = \dfrac{x^2}{x}$

1/ u et v ont le même ensemble de définition : $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$,

$$u(x) = 3 - \frac{2}{x+1} = \frac{3(x+1)-2}{x+1} = \frac{3x+1}{x+1} = v(x)$$

donc $u = v$.

2/ u est définie sur $\mathbb{R}$ et v est définie sur $\mathbb{R}^*$ donc $u \neq v$.

b) Opérations sur les fonctions

Définition

Soient u et v deux fonctions définies sur D et λ un réel.
– On définit les fonctions $u+v$, uv, λu, $u+\lambda$ de la façon suivante :

$$(u+v)(x) = u(x) + v(x) \qquad (uv)(x) = u(x) \times v(x)$$
$$(\lambda u)(x) = \lambda \times u(x) \qquad (u+\lambda)(x) = u(x) + \lambda$$

– Si, pour tout $x \in D$, $v(x) \neq 0$ alors on peut définir la fonction $\dfrac{u}{v}$ par :

$$\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

Exemple : Soit u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ *par* $u(x) = x^2$ *et* $v(x) = x + 3$*. Déterminer* $u + v$*,* uv*,* $2u$*,* $u + 2$ *et* $\dfrac{u}{v}$*.*

– Pour tout réel x, $(u+v)(x) = x^2 + x + 3$; $(uv)(x) = x^2(x+3) = x^3 + 3x^2$; $(2u)(x) = 2x^2$ et $(u+2)(x) = x^2 + 2$
– Pour tout réel $x \neq -3$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)(x) = \dfrac{x^2}{x+3}$

c) Composition de fonctions

Définition

Soit u une fonction définie sur D_u et v une fonction définie sur D_v et telle que pour tout $x \in D_v$, $v(x) \in D_u$.
On appelle fonction composée de v par u la fonction notée $u \circ v$ et définie sur D_v par :
Pour tout $x \in D_v$, $u \circ v(x) = u(v(x))$

$$
\begin{tikzcd}
D_v \arrow[r] & D_u \arrow[r] & \mathbb{R} \\
x \arrow[r, mapsto, "v"] \arrow[rr, bend right, "u \circ v"'] & v(x) \arrow[r, mapsto, "u"] & u(v(x))
\end{tikzcd}
$$

Remarque : Il faut faire attention à l'ordre des fonctions. $u \circ v$ et $v \circ u$ sont en général des fonctions différentes. Il se peut qu'elles aient des ensembles de définition différents voire que l'une existe mais pas l'autre.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - 1$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 3$. Définir $g \circ f$ et $f \circ g$. Sont-elles égales ?

- $g \circ f$ est définie sur $[0; +\infty[$ par $g \circ f(x) = g(f(x)) = (\sqrt{x} - 1)^2 + 3 = x - 2\sqrt{x} + 4$
- $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 3} - 1$
- $g \circ f$ et $f \circ g$ ne sont pas égales car elles n'ont pas le même ensemble de définition. On peut ausi remarquer que $g \circ f(0) \neq f \circ g(0)$

2/ Sens de variation

a) Sens de variation de la fonction $u + \lambda$

Propriété

Soit u une fonction défine sur un intervalle I et λ un réel.
Si u est monotone sur I alors u et $u + \lambda$ ont même sens de variation sur I.

Démonstration

Cas où u est croissante
Soient a et b deux réels de I.

$$
\begin{aligned}
a \leqslant b &\Longrightarrow u(a) \leqslant u(b) \text{ car } u \text{ est croissante sur } I. \\
&\Longrightarrow u(a) + \lambda \leqslant u(b) + \lambda
\end{aligned}
$$

La fonction $u + \lambda$ est croissante sur I.

b) Sens de variation de la fonction λu

Propriété

Soit u une fonction défine et monotone sur un intervalle I et λ un réel.
- Si $\lambda > 0$ alors les fonctions u et λu ont même sens de variation sur I.
- Si $\lambda < 0$ alors les fonctions u et λu ont des sens de variation contraires sur I.

Démonstration

Cas où u est croissante
Soient a et b deux réels de I. Si $a \leqslant b$ alors $u(a) \leqslant u(b)$ car u est croissante sur I.
- Si $\lambda > 0$ alors $\lambda u(a) \leqslant \lambda u(b)$ donc λu est croissante sur I.
- Si $\lambda < 0$ alors $\lambda u(a) \geqslant \lambda u(b)$ donc λu est décroissante sur I.

c) Sens de variation de la fonction $u \circ v$

Propriété

Soit u une fonction définie et monotone sur un intervalle J. Soit v une fonction définie et monotone sur un intervalle I et telle que pour tout $x \in I$, $v(x) \in J$.
– Si u et v ont même sens de variation alors $u \circ v$ est croissante sur I.
– Si u et v ont des sens de variation contraires alors $u \circ v$ est décroissante sur I.

Démonstration

Cas où u est croissante
Soient a et b deux réels de I. Si $a \leqslant b$ alors $v(a) \in J$, $v(b) \in J$ et $v(a) \leqslant v(b)$ car v est croissante sur I.

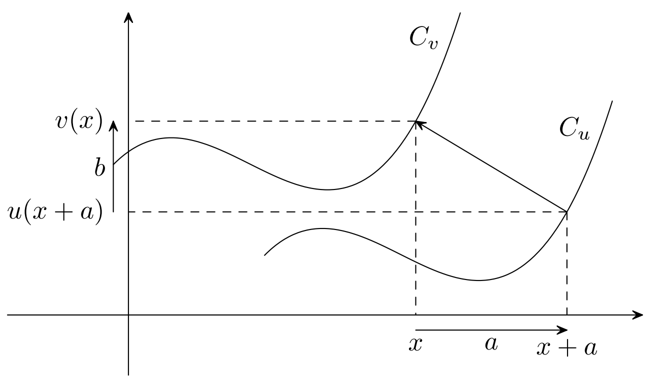
- Si u est croissante sur J alors $u(v(a)) \leqslant u(v(b))$ donc $u \circ v(a) \leqslant u \circ v(b)$ donc $u \circ v$ est croissante sur I.
- Si u est décroissante sur J alors $u(v(a)) \geqslant u(v(b))$ donc $u \circ v(a) \geqslant u \circ v(b)$ donc $u \circ v$ est décroissante sur I.

3/ Représentations graphiques

a) Représentation graphique d'une fonction $x \mapsto u(x+a)+b$

Propriété

Soit u une fonction et v la fonction définie par $v(x) = u(x+a)+b$.
Dans un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on appelle $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ les courbes représentatives des fonctions u et v.
$\mathscr{C}_v$ est l'image de $\mathscr{C}_u$ par la translation de vecteur $-a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$, autrement dit le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$.



Démonstration

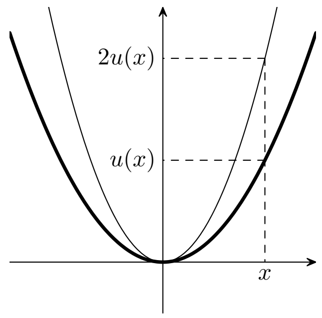
Soient $M(x;y)$ et $M'(x-a;y+b)$.

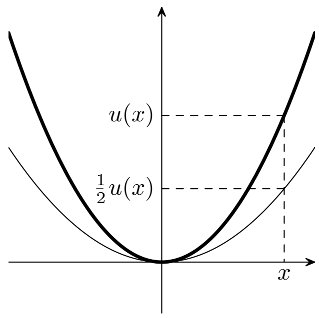
$$M' \in \mathscr{C}_v \Leftrightarrow y+b = v(x-a) \Leftrightarrow y+b = u(x-a+a)+b \Leftrightarrow y = u(x) \Leftrightarrow M \in \mathscr{C}_v$$

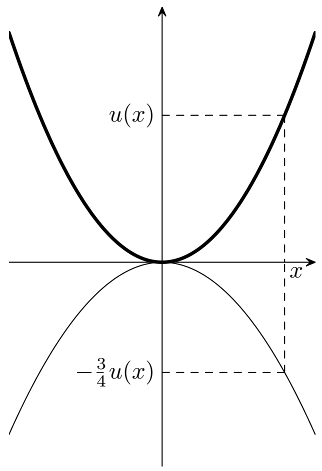
b) Représentation graphique d'une fonction $\boldsymbol{\lambda u}$

Propriété

Soit u une fonction et v la fonction λu Dans un repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on appelle $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ les courbes représentatives des fonctions u et v. Si M est le point de $\mathscr{C}_u$ d'abscisse x alors on obtient le point d'abscisse x de $\mathscr{C}_v$ en multipliant l'ordonnée de M par λ.







Chapitre 2

Polynômes du second degré

1/ Généralités sur les polynômes

a) Définition

Définition

On appelle fonction polynôme toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

où a_0, a_1, ..., a_n sont des réels donnés.

Exemple : $x \mapsto -x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ *est un polynôme.* $x \mapsto \dfrac{x^4 - 4}{x^2 + 2}$ *n'est pas un polynôme.*

b) Propriétés (admises)

Propriété

1/ Soit P le polynôme défini par $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
P est le polynôme nul $\iff a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

2/ Soient P et Q les polynômes définis par $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ et $Q(x) = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ avec $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$.

$$P = Q \iff \begin{cases} n = p \\ a_0 = b_0 \,;\, a_1 = b_1 \,;\, \cdots\, a_n = b_n \end{cases}$$

Conséquence : L'écriture d'un polynôme est unique.

Exemple : Si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 2x^3 - x + 2$ *alors* $a = 2$, $b = 0$, $c = -1$ *et* $d = 1$.

c) Degré

Définition

Soit P un polynôme défini par $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$.
Le nombre n est appelé degré de P.

Exemple : $x \mapsto -x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ *est un polynôme de degré 3.* $x \mapsto 3x - x^5$ *est un polynôme de degré 5.*

d) Racines d'une fonction

Définition

Soit f une fonction. On appelle racine de f toute solution de l'équation $f(x) = 0$.

Exemple : 1 est une racine de $x \mapsto -x^3 - 5x^2 + 7x - 1$. *0 est une racine de* $x \mapsto 3x - x^5$.

2/ Polynômes du second degré

Dans tout le paragraphe, P désigne un polynôme défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

a) Forme canonique

Propriété et définition

Il existe des réels α et β tels que :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ P(x) = a\left((x+\alpha)^2 + \beta\right).$$

Cette écriture est appelée forme canonique de P.

Remarque : On appelle parfois forme canonique l'écriture de P sous la forme

$$P(x) = a(x+\alpha)^2 + \gamma$$

Démonstration

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}\right)$$

Exemple : Écrire la forme canonique du polynôme défini par $P(x) = 2x^2 + 4x + 6$.

$P(x) = 2x^2 + 4x + 6 = 2\left(x^2 + 2x + 3\right) = 2\left((x+1)^2 - 1 + 3\right) = 2\left((x+1)^2 + 2\right)$

b) Discriminant

Définition

On appelle discriminant de P le réel Δ défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemple : Calculer le discriminant du polynôme défini par $P(x) = 2x^2 + 4x + 6$.

$\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times 6 = 16 - 48 = -32$.

c) Racines

Propriété

Les racines de P peuvent être déterminée de la façon suivante :

- Si $\Delta < 0$ alors P n'a pas de racine réelle.
- Si $\Delta = 0$ alors P admet une racine réelle : $-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$ alors P admet deux racines réelles : $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Démonstration

$$P(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

- Si $\Delta < 0$ alors $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc pour tout x, $P(x) \neq 0$.
- Si $\Delta = 0$ alors $P(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ donc $P(x) = 0 \iff x = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$ alors $P(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

  donc

$$P(x) = 0 \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \quad \text{ou} \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$\iff x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemple : Déterminer les racines de P et Q définis par

$$P(x) = 2x^2 + 4x + 6 \quad \textit{et} \quad Q(x) = -x^2 - 2x + 1$$

Pour P : $\Delta = -32 < 0$ donc P n'a pas de racine.
Pour Q : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 4 + 4 = 8 > 0$ donc Q admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2\times(-1)} = \frac{2-2\sqrt{2}}{-2} = -1+\sqrt{2}$$
$$x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2\times(-1)} = \frac{2+2\sqrt{2}}{-2} = -1-\sqrt{2}$$

d) Liens entre coefficients et racines

Propriété

Si P admet deux racines x_1 et x_2 alors $\begin{cases} r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1 r_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Démonstration

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$
$$x_1 x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

e) Factorisation

Propriété

- Si $\Delta < 0$ alors P ne peut pas être factorisé.
- Si $\Delta = 0$ alors $P(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$
- Si $\Delta > 0$ alors $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines de P.

Démonstration

Le premier résultat s'obtient en remarquant que si P pouvait se factoriser, on aurait deux facteurs du premier degré auquel cas l'équation $P(x) = 0$ admettrait au moins une solution, ce qui est contradictoire avec le résultat obtenu précédemment. Les deux autres résultats ont été obtenus dans le cours de la démonstration précédente.

Exemple : Factoriser P et Q définis par

$$P(x) = 2x^2 + 4x + 6 \quad et \quad Q(x) = -x^2 - 2x + 1$$

Pour P : $\Delta = -32 < 0$ donc P ne peut pas se factoriser.
Pour Q : Les racines sont $-1 + \sqrt{2}$ et $-1 + \sqrt{2}$ donc $P(x) = -(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$.

f) Signe

Propriété

– Si $\Delta < 0$ alors

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $P(x)$		Signe de a	

– Si $\Delta = 0$ alors

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
Signe de $P(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

– Si $\Delta > 0$ alors

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $P(x)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

où x_1 et x_2 sont les racines de P et $x_1 < x_2$

Démonstration

– Si $\Delta < 0$ alors $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc $P(x)$ est du signe de a.

– Si $\Delta = 0$ alors $P(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ qui est du signe de a sauf pour $-\dfrac{b}{2a}$.

– Si $\Delta > 0$ alors $P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ où r_1 et r_2 sont les racines de P. On peut donc dresser le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		Signe de a		Signe de a		Signe de a	
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $P(x)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

Exemple : Déterminer le tableau de signe de P et Q définis par

$$P(x) = 2x^2 + 4x + 6 \quad et \quad Q(x) = -x^2 - 2x + 1$$

Pour P : $\Delta > 0$ donc

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$+$	

Pour Q : Les racines sont $-1 - \sqrt{2}$ et $-1 + \sqrt{2}$ et de plus $-1 < 0$ donc

x	$-\infty$		$-1 - \sqrt{2}$		$-1 + \sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

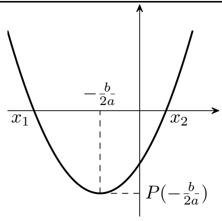
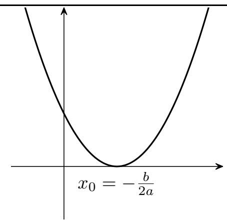
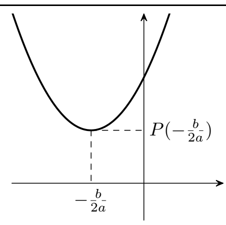
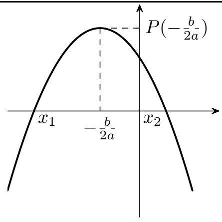
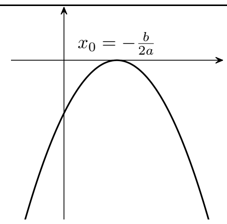
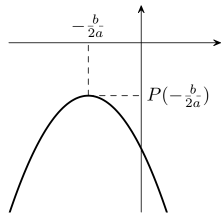
g) Représentation graphique

Propriété

Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère du plan.

La représentation graphique de P est l'image par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -\frac{b}{2a} \\ -\frac{\Delta}{4a} \end{pmatrix}$ de la parabole représentant la fonction $x \mapsto ax^2$.
C'est donc une parabole de sommet $S\left(-\frac{b}{2a}; P(-\frac{b}{2a})\right)$.

Illustration :

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Factorisation de $P(x)$	$a(x - x_1)(x - x_2)$	$a(x - x_0)^2$	pas de factorisation
Équation $P(x) = 0$	2 solutions x_1 et x_2	une solution x_0	pas de solution
$a > 0$			
$a < 0$			

Chapitre 3

Dérivation des fonctions

1/ Généralités

a) Limite en 0

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant 0 et $L \in \mathbb{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers 0 si on peut rendre $f(x)$ aussi proche de L que l'on veut pour x suffisamment proche de zéro. On note : $\lim\limits_{x\to 0} hf(x) = L$

Exemple : $\lim\limits_{x\to 0} xx^2 = 0 \qquad \lim\limits_{x\to 0} xx+1 = 1 \qquad \lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{x}+x-2 = -2\ldots$

Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{x^2-2x}{3x}$.

Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{x^2-2x}{3x} = \dfrac{x-2}{3}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{x^2-2x}{3x} = -\dfrac{2}{3}$.

b) Nombre dérivé

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$.
On appelle taux de variation de f entre a et h le réel $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
On dit que f est dérivable en a si, lorsque h tend vers 0, le taux de variation de f entre a et h tend vers un réel L autrement dit si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$.
Ce réel L est appelé nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.

Exemple : Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto x^2$ *est dérivable en 2 et calculer* $f'(2)$.
Démontrer que la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ *n'est pas dérivable en 0.*

Pour tout $h \neq 0$, $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{(2+h)^2-4}{h} = \dfrac{h^2+4h}{h} = h+4$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} h\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 4$.

f est donc dérivable en 2 et $f'(2) = 4$.

Pour tout $h \neq 0$, $\dfrac{g(0+h)-g(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$.

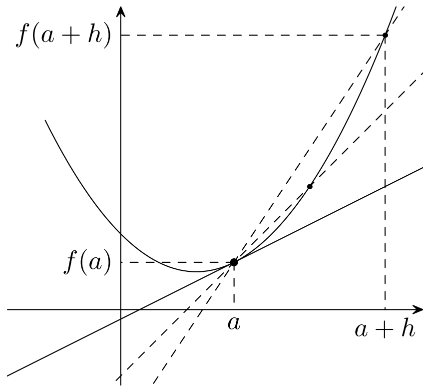
Or, $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ n'a pas de limite finie lorsque h tend vers 0 donc g n'est pas dérivable en 0.

c) Interprétation graphique

Propriété

Soit f une fonction définie sur I et C_f sa représentation graphique dans un repère. Soit $a \in I$.
Si f est dérivable en a alors $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point $A(a; f(a))$. L'équation de cette tangente est alors : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Illustration : Soit $A(a; f(a)) \in C_f$.
Soit $h \neq 0$ et $M(a+h; f(a+h)) \in C_f$.
Le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ représente le coefficient directeur de la droite (AM). Lorsque h tend vers 0, M se rapproche de A et la droite (AM) tend à se confondre avec la tangente à C_f en A.



Démonstration

Soit T la tangente à la courbe au point A. Son coefficient directeur est $f'(a)$ donc l'équation réduite de T est de la forme $y = f'(a)x + b$.
$A \in T$ donc $f(a) = f'(a)a + b$ donc $b = f(a) - af'(a)$.
L'équation de T est donc $y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$ soit $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

d) Approximation affine

Propriété

Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $a \in I$.
– Il existe une fonction φ telle que pour tout réel h avec $a+h \in I$:
$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} h\varphi(h) = 0$$
– La fonction $h \longmapsto f(a) + hf'(a)$ est une approximation affine de f pour h proche de 0.

Démonstration

Pour $h \neq 0$, on pose $\varphi(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$.
f est dérivable en a donc lorsque h tend vers 0, $\varphi(h)$ tend vers $f'(a) - f'(a) = 0$.
De plus, $h\varphi(h) = f(a+h) - f(a) + hf'(a)$ soit $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h)$

2/ Calculs de dérivées

a) Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction défine sur un intervalle I.
– Si, pour tout x de I, f est dérivable en x, on dit que f est dérivable sur I.
– La fonction définie sur I par $x \longmapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f. Cette fonction est notée f'.

b) Dérivées usuelles

Fonctions constantes

Propriété

Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = k$
alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $f'(x) = 0$.

Démonstration

Pour tout réel a et $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0$$

f est donc dérivable en a et $f'(a) = 0$.

Fonctions affines

Propriété

Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = mx + p$
alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $f'(x) = m$.

Démonstration

Pour tout réel a et $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{m(a+h)+p-ma-p}{h} = \frac{mh}{h} = m$$

f est donc dérivable en a et $f'(a) = m$

Fonction carré

Propriété

Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$
alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $f'(x) = 2x$.

Démonstration

Pour tout réel a et $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a+h$$

De plus, $2a + h$ tend vers $2a$ lorsque h tend vers 0. f est donc dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

Fonctions puissances

Propriété

Soit n un entier tel que $n \geqslant 1$.
Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^n$
alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $f'(x) = nx^{n-1}$.

Résultat admis.

Fonction inverse

Propriété

Si f est la fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x}$

alors f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x\neq 0$: $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

Démonstration

Pour tout réel $a\neq 0$ et $h\neq 0$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h}=\frac{a-(a+h)}{ha(a+h)}=\frac{-1}{a(a+h)}$$

Or $\dfrac{-1}{a(a+h)}$ tend vers $-\dfrac{1}{a^2}$ lorsque h tend vers 0.

f est donc dérivable en a et $f'(a)=-\dfrac{1}{a^2}$

Fonction racine carrée

Propriété

Si f est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x}$

alors f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout réel $x>0$: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Démonstration

Pour tout réel $a>0$ et $h\neq 0$ tel que $a+h>0$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}=\frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$$

$$=\frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}=\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

Or, lorsque h tend vers 0, $\dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$ tend vers $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

f est donc dérivable en a et $f'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

Fonctions trigonométriques

Propriété

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$\sin'(x)=\cos(x)\qquad\text{et}\qquad\cos'(x)=-\sin(x)$$

Résultat admis.

c) Opérations sur les fonctions et dérivées

u et v désignent deux fonctions dérivables sur un intervalle I et λ un réel.

Propriété

La fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)'=u'+v'$.

La fonction λu est dérivable sur I et $(\lambda u)'=\lambda u'$.

Démonstration

Pour tout $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$:

$$\begin{aligned}\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} &= \frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}\end{aligned}$$

dont la limite est $u'(a)+v'(a)$ lorsque h tend vers 0.

$$\frac{(\lambda u)(a+h)-(\lambda u)(a)}{h} = \frac{\lambda u(a+h)-\lambda u(a)}{h} = \lambda \frac{u(a+h)-u(a)}{h}$$

dont la limite est $\lambda u'(a)$ lorsque h tend vers 0.

Exemple : Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ *par* $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{3x} - 5\sqrt{x} + 2$

f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ car elle est la somme de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ et, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = 3 \times 2x + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ainsi :

$$f'(x) = 6x - \frac{1}{3x^2} - \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

Propriété

La fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

La fonction u^2 est dérivable sur I et $(u^2)' = 2uu'$.

Démonstration

Pour tout $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$:

$$\begin{aligned}\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} &= \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)-u(a)v(a)}{h} \\ &= \underbrace{\frac{u(a+h)-u(a)}{h}}_{\text{tend vers } u'(a)} \times v(a+h) + \underbrace{\frac{v(a+h)-v(a)}{h}}_{\text{tend vers } v'(a)} \times u(a)\end{aligned}$$

dont la limite est $u'(a)v(a)+v'(a)u(a)$ lorsque h tend vers 0.
Ainsi uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.

Exemple : Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2+1)(x^5+2)$

$f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x^2+1$ et $v(x) = x^5+2$.
f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 2x(x^5+2) + 5x^4(x^2+1)$$

Propriété

Si v ne s'annule pas sur I

La fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Démonstration

Pour tout $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$:

$$\frac{\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}}{h} = \frac{v(a)-v(a+h)}{hv(a+h)v(a)} = -\frac{v(a+h)-v(a)}{h} \times \frac{1}{v(a)v(a+h)}$$

dont la limite est $-v'(a) \times \dfrac{1}{(v(a))^2}$ lorsque h tend vers 0.
Ainsi $\dfrac{1}{v}$ est dérivable et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$
De plus

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \times \frac{1}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exemple : Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $]2\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3}{2x-4}$ et de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{3x+5}{2x^2+1}$

Pour tout $x \in]2\ ;\ +\infty[$, $f(x) = \lambda \times \dfrac{1}{u(x)}$ avec $\lambda = 3$ et $u(x) = 2x - 4$.

f est donc dérivable sur $]2\ ;\ +\infty[$ et $f(x) = 3 \times \left(-\dfrac{2}{(2x-4)^2}\right) = \dfrac{-6}{(2x-4)^2}$.

Pour tout réel x , $g(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 3x + 5$ et $v(x) = 2x^2 + 1$.
g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g(x) = \frac{3(2x^2+1) - 4x(3x+5)}{(2x^2+1)^2} = \frac{-6x^2 - 20x + 3}{(2x^2+1)^2}$$

Propriété

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle J et u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout x de I, $u(x) \in J$.
La fonction $f \circ u$ est dérivable et, pour tout réel x de I :

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$$

Exemple : Calculer la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Pour tout réel x, $g(x) = f \circ u(x)$ avec $u(x) = 2x + \dfrac{\pi}{3}$ et $f(x) = \cos(x)$.
g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

3/ Applications de la dérivation

a) Dérivée et variations

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
– f est croissante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$.
– f est constante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) = 0$.
– f est décroissante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$.

Propriété admise.
Remarques : On utilise souvent les résultats suivants.
– Si, pour tout x de I, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
– Si, pour tout x de I, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.

Exemple : Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x$.

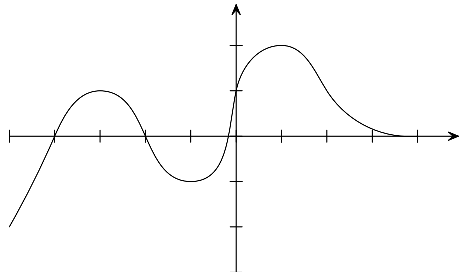
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Extremum local

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.
On dit que $f(x_0)$ est un maximum local (respectivement minimum local) de f si l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \leqslant f(x_0)$ (respectivement $f(x) \geqslant f(x_0)$).

Exemple : Une fonction est représentée ci-contre.
Son minimum est -2
Son maximum est 2.
-1 *et* -2 *sont des minimums locaux*
1 et 2 sont des maximums locaux.



Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$.
Si $f(x_0)$ est un extremum local de f alors $f'(x_0) = 0$.

Remarque : La réciproque de cette propriété est fausse.

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$.
Si f' s'annule en changeant de signe en x_0 alors $f(x_0)$ est un extremum local de f.

Chapitre 4

Limites

1/ Limites d'une fonction en l'infini

a) Limite réelle en l'infini, asymptote horizontale

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A\ ;\ +\infty[$. On dit que f tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.
On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

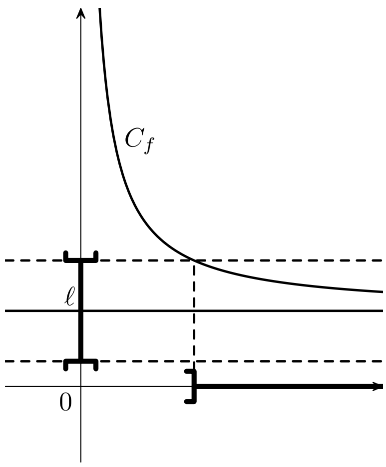
Remarque : on peut définir de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) \in]1-a\ ;\ 1+a[&\Leftrightarrow 1-a < 1+\frac{1}{x} < 1+a \\ &\Leftrightarrow -a < \frac{1}{x} < a \\ &\Leftrightarrow x > \frac{1}{a} \quad \text{car } x \text{ est positif.} \end{aligned}$$

Ainsi pour $x > \dfrac{1}{a}$, $f(x) \in\ ]1-a\ ;\ 1+a[$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.



Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A\ ;\ +\infty[$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ou si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

Limites usuelles

Propriété

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\,; \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0\,; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0\,; \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0\,; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

b) Limite infinie en l'infini

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A\ ;\ +\infty[$. On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]M\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.
On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

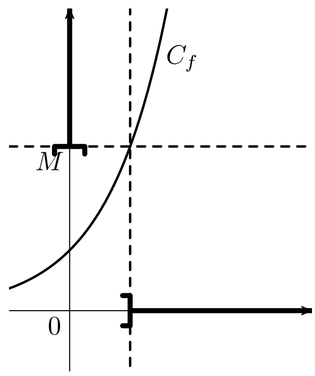
Remarque : on peut définir de même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$...

Exemple : Soit f la fonction définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x^2+3$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Soit $M \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) > M &\Leftrightarrow x^2+3 > M \Leftrightarrow x^2 > M-3 \\ &\Leftrightarrow x > \sqrt{M-3} \quad \text{pour } M > 3. \end{aligned}$$

Ainsi pour $x > \sqrt{M-3}$, $f(x) > M$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.



Limites usuelles

Propriété

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\,;\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty\,;\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty\,;\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty\,;\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty.$

2/ Limite d'une fonction en un point

a) Limite réelle en un point

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f tend vers L lorsque x tend vers a si tout intervalle ouvert contenant L contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.
On note $\lim\limits_{x\to x} af(x) = L$.

Remarque : $\lim\limits_{x\to x} af(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to h} 0f(a+h) = L$

Exemple : $\lim\limits_{x\to0} xx = 0$; $\quad \lim\limits_{x\to0} xx^2 = 0$; $\quad \lim\limits_{x\to0} x\dfrac{(1+x)^2-1}{x} = 2.$

b) Limite infinie en un point, asymptote verticale

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si tout intervalle de la forme $]M\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.
On note $\lim\limits_{x\to x} af(x) = +\infty$.

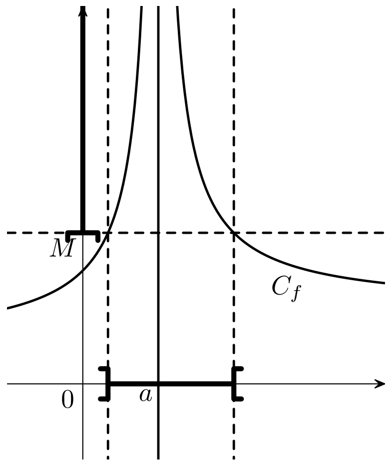
Remarque : On peut définir de même $\lim\limits_{x\to x} af(x) = -\infty$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} xf(x) = +\infty$.

Soit $M \in \mathbb{R}$

$$f(x) > M \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > M \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{M}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{M}} < x < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Ainsi pour $-\dfrac{1}{\sqrt{M}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{M}}$, $f(x) > M$ donc $\lim\limits_{x\to 0} xf(x) = +\infty$.



Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
Si $\lim\limits_{x\to x} af(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to x} af(x) = -\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

Limites usuelles

Propriété

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty\,;$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty\,;$ $\lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{1}{x^2} = +\infty\,;$ $\lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

3/ Asymptotes obliques

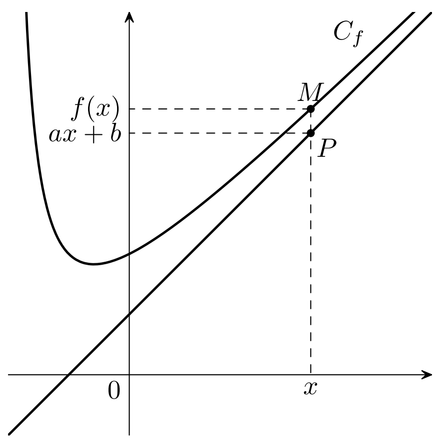
Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A\ ;\ +\infty[$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0$), on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

Interprétation graphique :
Le point M a pour coordonnées $(x; f(x))$ et le point N a pour coordonnées $(x; ax+b)$.
La distance MN est donc égale à

$$|f(x) - (ax+b)|$$

Ainsi, si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0$ alors la longueur MN tend vers 0.
La courbe « se rapproche » de la droite et tend à « suivre la direction » de la droite.



Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{x^2}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Soit d la droite d'équation $y = 2x - 1$.
Démontrer que d est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

Pour tout $x \neq 0$, $f(x) - (2x - 1) = \dfrac{1}{x^2}$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.
Ainsi, d est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

4/ Opérations sur les limites

Dans les tableaux suivants, a désigne un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

a) Somme de fonctions

Si $\lim\limits_{x\to x} af(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x\to x} ag(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to x} af(x) + g(x) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	? ? ?	$-\infty$

Remarque : ? ? ? signifie que l'on ne peut pas conclure. Cela ne signifie pas que la limite n'existe pas mais simplement qu'on ne peut pas la trouver directement. On parle de « forme indéterminée ».

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + \dfrac{1}{x}$.

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{array}\right. \quad \text{donc } \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + \frac{1}{x} = +\infty$$

b) Produit par une constante

k désigne un nombre réel différent de 0.

Si $\lim\limits_{x\to x} af(x) =$	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
et		$k > 0$	$k < 0$	$k > 0$	$k < 0$
alors $\lim\limits_{x\to x} akf(x) =$	$k\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

c) Produit de fonctions

Si $\lim\limits_{x\to x} af(x) =$	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x\to x} ag(x) =$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to x} af(x) \times g(x) =$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$	? ? ?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Remarque : $\pm\infty$ signifie $+\infty$ ou $-\infty$. Dans le cas de la troisième ligne, c'est la règle des signes d'un produit qui permet de conclure.

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)(x^2 + 2)$.

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} - 1 = -1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 2 = +\infty \end{array}\right. \quad \text{donc } \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right)(x^2 + 2) = -\infty$$

d) Quotient de fonctions

Si $\lim\limits_{x \to x} af(x) =$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
et $\lim\limits_{x \to x} ag(x) =$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	ℓ'	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{x \to x} a\dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	? ? ?	$\pm\infty$	? ? ?

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{x \to x} 1\dfrac{-3x+2}{(x-1)^2}$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x} 1 - 3x + 2 = -1 \\ \lim\limits_{x \to x} 1(x-1)^2 = 0^+ \end{cases} \quad \text{donc } \lim\limits_{x \to x} 1\frac{-3x+2}{(x-1)^2} = -\infty$$

e) Exemple d'étude d'une forme indéterminée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 5$.
Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -3x + 5 = +\infty \end{cases} \quad \text{donc } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x^2 \left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^2}\right)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{x^2} = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} = 1$$

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Chapitre 5

Vecteurs de l'espace

1/ Rappels

a) Généralités

Axiomes d'incidence

Les axiomes d'incidence de la géométrie dans l'espace sont des axiomes qui fournissent des relations entre les points, les droites et les plans de cette géométrie.

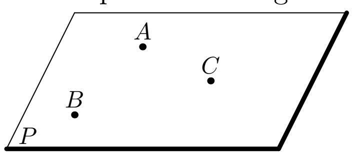
axiomes

– Par deux points distincts A et B de l'espace il passe une et une seule droite. Cette droite peut être notée (AB).
– Étant donnés deux points A et B, il existe C tel que A, B et C ne soient pas alignés. Par ces tois points, il passe un et un seul plan. Ce plan peut être noté (ABC).
– Si A et B sont deux points d'un plan P, tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan P.

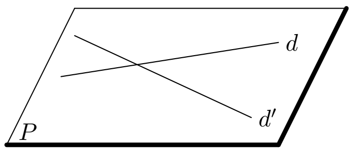
Conséquence

Un plan peut être déterminé par l'une des conditions suivantes :

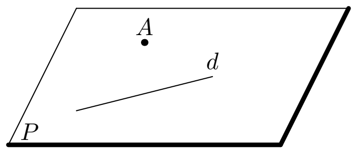
Trois points non alignés



Deux droites sécantes



Une droite et un point



Propriété

Propriété

Les résultats de géométrie plane s'appliquent dans chaque plan de l'espace.

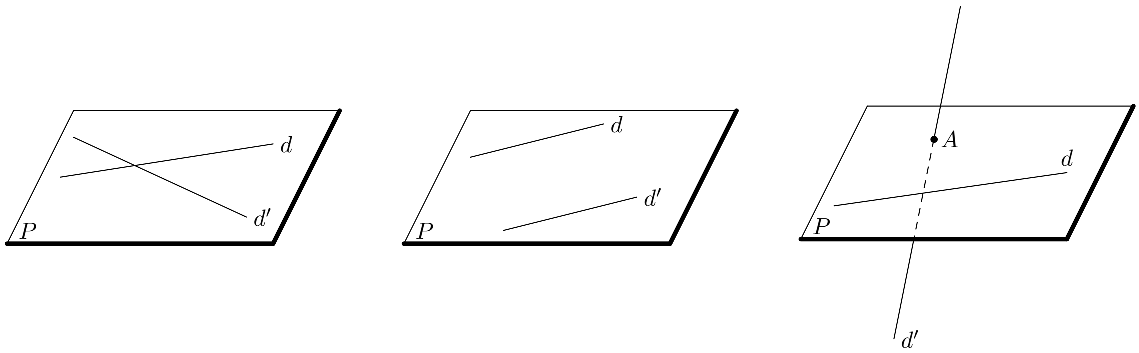
On peut donc utiliser dans chaque plan le théorème de Pythagore, les caractérisations des triangles semblables et isométriques, la trigonométrie, etc.

b) Positions relatives de droites et plans

Deux droites

On considère deux droites de l'espace.

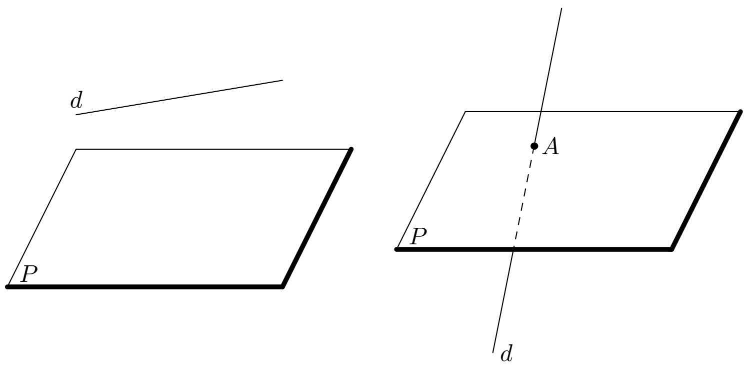
Définition
- s'il existe un plan contenant ces deux droites on dit qu'elles sont coplanaires. Elles sont alors sécantes ou parallèles.
- s'il n'existe pas de plan contenant ces deux droites on dit qu'elles sont non coplanaires.



Une droite et un plan

On considère une droite et un plan de l'espace.

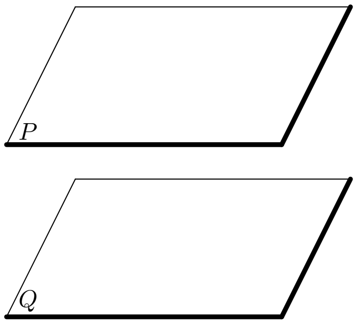
Propriété
- s'ils n'ont aucun point commun, la droite est strictement parallèle au plan.
- s'ils ont un unique point commun, la droite et le plan sont sécants.
- s'ils ont plus d'un point commun, la droite est incluse dans le plan.

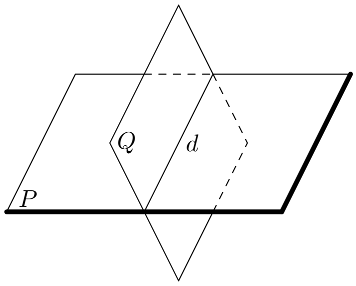


Deux plans

On considère deux plans de l'espace.

Propriété
- s'ils n'ont aucun point commun, les plans sont parallèles.
- s'ils ont au moins un point commun mais sont distincts, les plans sont sécants et leur intersection est une droite.
- s'ils ont trois points commun non alignés, les plans sont confondus.



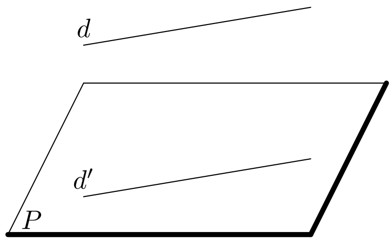


c) Parallélisme

Une droite et un plan

Propriété

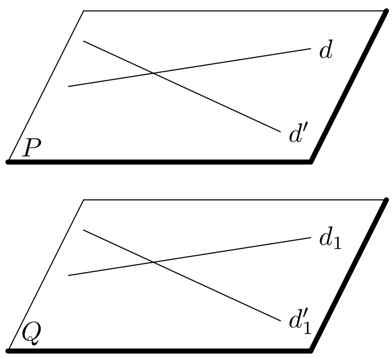
Si une droite d est parallèle à une droite d' alors la droite d est parallèle à tout plan contenant d'.



Deux plans

Propriété

Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan Q, alors les plans P et Q sont parallèles.



2/ Vecteurs de l'espace

a) Généralités

La notion de vecteur vue en géométrie plane se généralise à l'espace. Les propriétés suivantes, en particulier, restent vraie :

Propriété

- Pour tout point O de l'espace et tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point A tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$.
- Pour tous points A, B, C et D de l'espace, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABCD$ est un parallèlogramme.
- Pour tous points A, B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles)
- La définition du produit d'un vecteur par un réel ainsi que les règles de calcul sont les mêmes que celles du plan.
- Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires s'il existe deux réels a et b non nuls simultanément tels que $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

b) Caractérisation vectorielle d'une droite

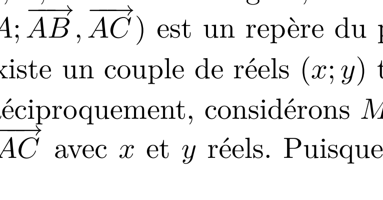
Propriété

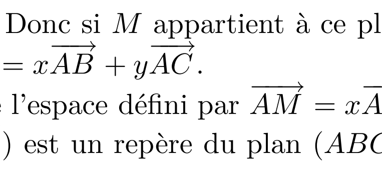
- Soit A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur.
  L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires (c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u}$ où k est un réel) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
- Soient A et B deux points de l'espace.
  La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

c) Caractérisation vectorielle d'un plan

Propriété

- Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace.
  Le plan (ABC) est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
- Soit A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires.
  L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$ où x et y sont des réels est un plan que l'on note $(A; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.





Démonstration

- A, B, C étant non alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan (ABC). Donc si M appartient à ce plan il existe un couple de réels $(x; y)$ tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
  Réciproquement, considérons M un point de l'espace défini par $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ avec x et y réels. Puisque $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan (ABC), il

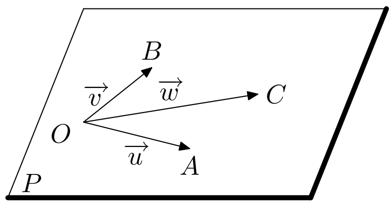
existe dans ce plan un point N de coordonnées $(x;y)$ tel que $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$ et $M = N$ donc $M \in (ABC)$.

– Soit B le point tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et C le point tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$ est alors le plan (ABC).

d) Vecteurs coplanaires

Définition

On dit que des points sont coplanaires s'ils sont situés dans un même plan. On dit que trois vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sont coplanaires lorsque, ayant choisi un point O quelconque, ce point O et les points A, B, C définis par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$ sont coplanaires.



Propriété

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace.
$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe trois réels a, b et c non nuls simultanément tels que $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

Remarque : On peut aussi démontrer la caractérisation suivante.

$$\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{w} \text{ sont coplanaires} \iff \left|\begin{array}{l} \quad\overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{w} \text{ sont colinéaires} \\ \text{ou } \overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w} \end{array}\right.$$

Démonstration

– Supposons $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ coplanaires. Soit O un point de l'espace et A, B, C définis par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$.
Les points O, A, B et C sont donc coplanaires.
Si O, A et B sont alignés alors $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires donc il existe des réels x et y non nuls simultanément tels que $x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{0}$. On a alors $x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + 0\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.
Si O, A et B ne sont pas alignés alors $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ est un repère de (OAB) et comme $C \in (OAB)$, il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ soit $x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

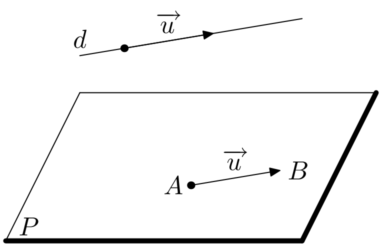
– Supposons $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.
Si $c \neq 0$ alors $\overrightarrow{OC} = -\frac{a}{c}\overrightarrow{OA} - \frac{b}{c}\overrightarrow{OB}$ donc les points O, A, B et C sont coplanaires donc $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

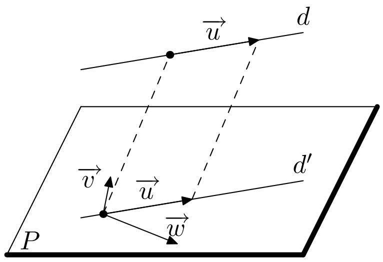
3/ Caractérisation vectorielle du parallélisme

a) Parallélisme d'une droite et d'un plan

Propriété

Soit d une droite dirigée par un vecteur $\overrightarrow{u}$ et P un plan dirigé par des vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.
- d est parallèle à P si et seulement si P contient deux points A et B tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
- d est parallèle à P si et seulement si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.





Démonstration

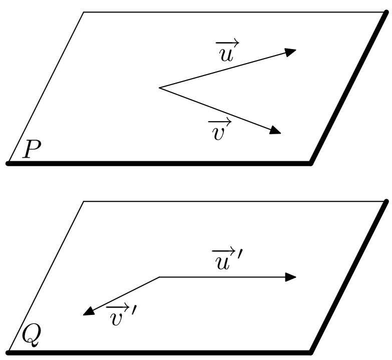
Deuxième propriété :

Soit $A \in d$, $B \in P$ et d' la droite parallèle à d passant par B. Soient E, F, G, H tels que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{u}$.
- Si d est parallèle à P alors comme d' est parallèle à d elle parallèle à P. Comme B est commun à d' et P alors d' est incluse dans P donc G est dans P. Ainsi B, E, F, G sont dans P donc coplanaires. Il en résulte que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.
- Réciproquement, si ces vecteurs sont coplanaires alors les points B, E, F, G sont coplanaires dans P. Comme $d' = (BG)$ alors d' est incluse dans P donc parallèle à P. Comme d' est parallèle à d alors d est parallèle à P.

b) Parallélisme de deux plans

Propriété

Soit P un plan dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et Q un plan dirigé par $\overrightarrow{u}'$ et $\overrightarrow{v}'$.
P est parallèle à Q si et seulement si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}'$ d'une part, et $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}'$ d'autre part, sont coplanaires.



Démonstration

Soit $A \in P$ et $B \in Q$.

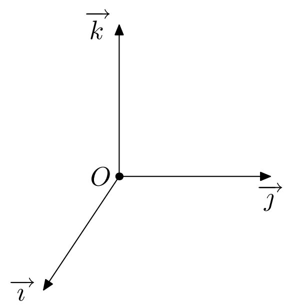
- Si Q est parallèle à P alors $D(B, \overrightarrow{v}')$ est parallèle à P car elle est incluse dans Q. Alors d'après le théorème précédent $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}'$ sont coplanaires.
  De la même façon on démontre que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}'$ sont coplanaires.
- Réciproquement, si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}'$ sont coplanaires alors $D(B, \overrightarrow{v}')$ est parallèle à P et il en est de même pour $D(B, \overrightarrow{u}')$. Ainsi Q contient deux droites sécantes parallèles à P il est donc parallèle à P.

4/ Repérage dans l'espace

a) Repère de l'espace

Définition

Choisir un repère cartésien de l'espace, c'est se donner un point O appelé origine du repère, et un triplet $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ de vecteurs non coplanaires (ce qui signifie, si on note $\overrightarrow{\imath} = \overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$, $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{OK}$, que les points O, I, J, K ne sont pas coplanaires). On note $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ ce repère. Le triplet de vecteurs $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est appelé base des vecteurs de l'espace.



b) Coordonnées

Coordonnées d'un point

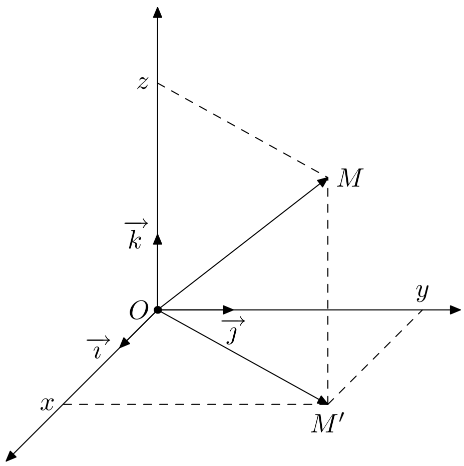
Propriété et définition

$(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est un repère de l'espace.
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de nombres réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k}$.
$(x; y; z)$ sont les coordonnées du point M dans le repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$. x est l'abscisse, y l'ordonnée, z la cote du point M dans ce repère.

Démonstration

Existence :
$\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}$ ne sont pas coplanaires donc le plan $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et la droite $(M; \overrightarrow{k})$ ne sont pas parallèles. Notons M' leur point d'intersection, M' est dans le plan $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ donc il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{M'M}$ et $\overrightarrow{k}$ sont colinéaires, donc il existe un réel z tel que $\overrightarrow{M'M} = z\overrightarrow{k}$.
Alors, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k}$.

Unicité :
Supposons $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k} = x'\overrightarrow{\imath} + y'\overrightarrow{\jmath} + z'\overrightarrow{k}$.
On a alors $(x - x')\overrightarrow{\imath} + (y - y')\overrightarrow{\jmath} + (z - z')\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$. Comme $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$ ne sont pas coplanaires, on a nécessairement $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.



Coordonnées d'un vecteur

Définition

Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace, $\overrightarrow{u}$ un vecteur et M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$. Par définition, les coordonnées $(x; y; z)$ de M dans le repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

Propriété

Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace, $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

Démonstration

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = x_B\overrightarrow{\imath} + y_B\overrightarrow{\jmath} + z_B\overrightarrow{k} - x_A\overrightarrow{\imath} - y_A\overrightarrow{\jmath} - z_A\overrightarrow{k} \\ &= (x_B - x_A)\overrightarrow{\imath} + (y_B - y_A)\overrightarrow{\jmath} + (z_B - z_A)\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

c) Calculs sur les coordonnées

Propriété

Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace, $\overrightarrow{u}(x, y, z)$, $\overrightarrow{v}(x', y', z')$ deux vecteurs et λ un réel.
$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}(x + x', y + y', z + z')$ et $\lambda\overrightarrow{u}(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

Démonstration

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} &= x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k} + x'\overrightarrow{\imath} + y'\overrightarrow{\jmath} + z'\overrightarrow{k} = (x + x')\overrightarrow{\imath} + (y + y')\overrightarrow{\jmath} + (z + z')\overrightarrow{k} \\ k\overrightarrow{u} &= k(x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k}) = kx\overrightarrow{\imath} + ky\overrightarrow{\jmath} + kz\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

Propriété

Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace, $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$.
Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}, \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

Démonstration

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(x_A\overrightarrow{\imath} + y_A\overrightarrow{\jmath} + z_A\overrightarrow{k} + x_B\overrightarrow{\imath} + y_B\overrightarrow{\jmath} + z_B\overrightarrow{k})\\ &= \frac{x_A + x_B}{2}\overrightarrow{\imath} + \frac{y_A + y_B}{2}\overrightarrow{\jmath} + \frac{z_A + z_B}{2}\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

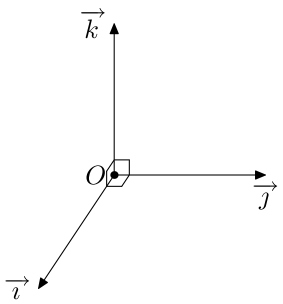
5/ Repère orthonormal, distance dans l'espace

Définition

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits orthogonaux si leurs directions sont orthogonales.
Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.

Définition

Un repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est un repère orthonormal si $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{k}$ sont deux à deux orthogonaux et de norme 1.

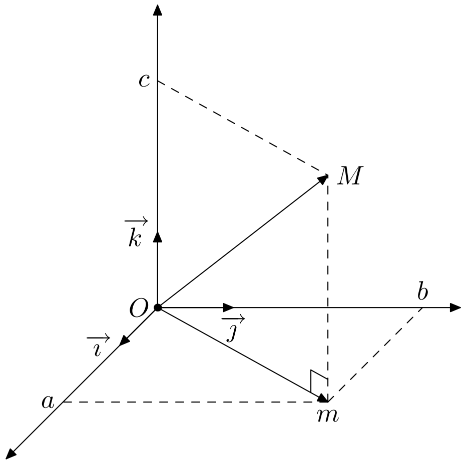


Propriété

Dans un repère orthonormal

1/ Si $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(a; b; c)$ alors $\|\overrightarrow{u}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2$

2/ Si M et P ont pour coordonnées $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$
alors $MP^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$.



Démonstration

1/ Soit $M(a;b;c)$ et $m(a,b,0)$. On a alors $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$ donc $\|\overrightarrow{u}\|^2 = OM^2$.
Comme le repère est orthonormal OMm est rectangle en m.
Donc $OM^2 = Om^2 + mM^2$
- Dans le plan (xOy) muni du repère orthonormal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ les coordonnées de m sont $(a;b)$ ainsi $Om^2 = a^2 + b^2$
- $\overrightarrow{mM} = c\overrightarrow{k}$ donc $\|\overrightarrow{mM}\| = |c|\|\overrightarrow{k}\|$ ainsi $\|\overrightarrow{mM}\|^2 = c^2$

On a alors $OM^2 = a^2 + b^2 + c^2$

2/ On applique ce qui précéde au vecteur $\overrightarrow{MP}$.

Chapitre 6

Barycentres

On se place dans le plan ou dans l'espace.

1/ Barycentre de deux points

a) Définition

Théorème et définition

Soient A et B deux points quelconques, α et β deux réels.
Il existe un unique point G du plan tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\alpha+\beta \neq 0$.
Ce point est appelé barycentre du système de points pondérés $(A, \alpha); (B, \beta)$. On note $G = \text{Bar}\left\{(A, \alpha) ; (B, \beta)\right\}$.

Démonstration

Quels que soient α et β :

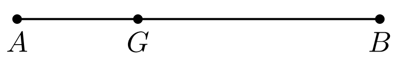
$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0} \iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$$
$$\iff (\alpha+\beta)\overrightarrow{GA} = -\beta\overrightarrow{AB} \iff (\alpha+\beta)\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB}$$

1/ Si $\alpha+\beta \neq 0$ alors l'équation équivaut à $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.
Le point G existe et est unique.

2/ Si $\alpha+\beta = 0$ alors l'équation équivaut à $\beta\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.
Cette n'équation n'admet pas de solution si $A \neq B$ et $\beta \neq 0$ et en admet une infinité si $A = B$ ou $\beta = 0$.

Exemple : Deux points A et B étant donnés, placer $G = Bar\{(A, 2) ; (B, 1)\}$.

$$\begin{aligned} & G = \text{Bar}\left\{(A, 2) ; (B, 1)\right\} \\ \iff & 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \\ \iff & 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \\ \iff & 3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \\ \iff & \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$



b) Propriétés

Dans tout le paragraphe, A et B sont deux points quelconques, α et β deux réels tels que $\alpha+\beta \neq 0$ et $G = \text{Bar}\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\}$

Homogénéité

Propriété

Soit k un réel. Si $k \neq 0$ alors $G = \text{Bar}\{(A,k\alpha)\,;(B,k\beta)\}$.

Démonstration

Si $k \neq 0$ alors :

$$G = \text{Bar}\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\} \iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \iff k(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}) = k\overrightarrow{0}$$
$$\iff k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \iff G = \text{Bar}\{(A,k\alpha)\,;(B,k\beta)\}$$

Exemple : Démontrer que l'on peut exprimer G comme barycentre de A et B de telle façon que la somme des coefficients soit égale à 1.

Si $G = \text{Bar}\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\}$ alors $G = \text{Bar}\left\{\left(A, \dfrac{1}{\alpha+\beta}\alpha\right);\left(B, \dfrac{1}{\alpha+\beta}\beta\right)\right\}$ car $\alpha+\beta \neq 0$.

On a ainsi $G = \text{Bar}\left\{\left(A, \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right);\left(B, \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\right\}$ avec $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} = 1$

Position du barycentre

Propriété

Si A et B sont distincts alors $G \in (AB)$. Autrement dit, A, B et G sont alignés.
Si, de plus, α et β sont de même signe alors $G \in [AB]$.

Démonstration

$G = \text{Bar}\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\} \iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$

Les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont donc colinéaires et G, A et B sont alignés.

De plus, on a obtenu au cours de la première démonstration le résultat suivant :

$\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

or si α et β sont de même signe alors $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$ est positif et inférieur à 1.

Ainsi $G \in [AB]$.

Propriété

Réciproquement, si $A \neq B$, tout point de la droite (AB) est le barycentre de A et B affectés de coefficients bien choisis.

Démonstration

Si $M \in (AB)$ alors $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

On a alors :

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{AM} - k(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{0}$$
$$\iff \overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \iff (k-1)\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$$

De plus, $k-1-k = -1 \neq 0$ donc $M = \text{Bar}\{(A,k-1)\,;(B,-k)\}$.

Isobarycentre

Propriété

Si $\alpha = \beta$, alors G est appelé isobarycentre de A et B. G est alors le milieu du segment $[AB]$.

Démonstration immédiate

Réduction vectorielle

Propriété

Quel que soit le point M, $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

Démonstration

Quel que soit le point M,

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} &= \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) = \alpha\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{MG} + \beta\overrightarrow{GB} \\ &= (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG} + \underbrace{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}}_{=\overrightarrow{0}} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}\end{aligned}$$

Exemple : Soit $G = Bar\{(A,2)\,;(B,5)\}$. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

L'égalité précédente pour $M = A$ donne $5\overrightarrow{AB} = 7\overrightarrow{AG}$. On a donc $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$.

c) Coordonnées du barycentre

Propriété

Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère du plan. Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
Si $G = \text{Bar}\,\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\}$ alors $G\left(\dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta}; \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta}\right)$
Dans un repère de l'espace, il suffit de faire le même calcul sur la troisième coordonnée.

Démonstration

Quel que soit le point M, on a $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.
Cette égalité est donc valable en particulier pour $M = O$.
On a donc $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{OG}$ soit $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA} + \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$
Les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ sont $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et les coordonnées de $\overrightarrow{OB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$.
On en déduit que les coordonnées de $\overrightarrow{OG}$ sont $\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha+\beta}x_A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}x_B \\ \frac{\alpha}{\alpha+\beta}y_A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta} \\ \frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}$.

Exemple : Dans un repère du plan, on a $A(3;-2)$ et $B(-1;4)$. Déterminer les coordonnées de G barycentre de $(A,2);(B,3)$.

On a :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{2\times x_A + 3\times x_B}{2+3} = \dfrac{2\times 3 + 3\times(-1)}{5} = \dfrac{2}{5} \\ y_G = \dfrac{2\times y_A + 3\times y_B}{2+3} = \dfrac{2\times(-2) + 3\times 4}{5} = \dfrac{8}{5} \end{cases}$$

Ainsi $G\left(\dfrac{2}{5}; \dfrac{8}{5}\right)$

2/ Barycentre de trois points

Les définitions et propriétés du paragraphe précédent s'étendent au cas de trois points pondérés.

a) Définition

Théorème et définition

Soient A, B et C trois points quelconques, α, β et γ trois réels.
Il existe un unique point G du plan tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.
Ce point est appelé barycentre du système de points pondérés $(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)$. On note $G = \text{Bar}\,\{(A, \alpha)\,; (B, \beta)\,; (C, \gamma)\}$

Démonstration

Quels que soient α, β et γ :

$$\begin{aligned}
\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} &\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{0} \\
&\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{GA} + \gamma\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0} \\
&\iff (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{GA} = -\beta\overrightarrow{AB} - \gamma\overrightarrow{AC} \\
&\iff (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

1/ Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ alors l'équation équivaut à

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AC}$$

Le point G existe et est unique.

2/ Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$ alors l'équation équivaut à $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$.
Cette n'équation n'admet pas de solution si $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{0}$ et en admet une infinité si $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$.

b) Associativité du barycentre

Propriété

Soient A, B et C trois points, α, β et γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$.

$$\text{Si } \begin{cases} G = \text{Bar}\,\{(A, \alpha)\,; (B, \beta)\,; (C, \gamma)\} \\ H = \text{Bar}\,\{(A, \alpha)\,; (B, \beta)\} \end{cases} \quad \text{alors} \quad G = \text{Bar}\,\{(H, \alpha + \beta)\,; (C, \gamma)\}$$

Démonstration

Supposons que $\begin{cases} G = \text{Bar}\,\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\,;(C,\gamma)\} \\ H = \text{Bar}\,\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\} \end{cases}$

On a alors :

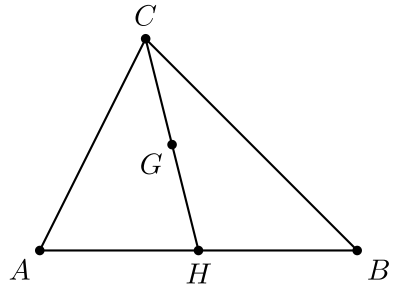
$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\overrightarrow{GH}+\gamma\overrightarrow{GC} &= \alpha\overrightarrow{GH}+\beta\overrightarrow{GH}+\gamma\overrightarrow{GC} = \alpha\overrightarrow{GA}+\alpha\overrightarrow{AH}+\beta\overrightarrow{GB}+\beta\overrightarrow{BH}+\gamma\overrightarrow{GC} \\ &= \underbrace{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}}_{=\overrightarrow{0}}+\underbrace{\alpha\overrightarrow{AH}+\beta\overrightarrow{BH}}_{=\overrightarrow{0}} = \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$G = \text{Bar}\,\{(H,\alpha+\beta)\,;(C,\gamma)\}$$

Exemple : Trois points A, B et C étant donnés, placer $G = Bar\{(A,1)\,;(B,1)\,;(C,2)\}$.

Posons $H = \text{Bar}\,\{(A,1)\,;(B,1)\}$. H est donc le milieu de $[AB]$.
D'après la propriété d'associativité,
$G = \text{Bar}\,\{(H,2)\,;(C,2)\}$.
G est donc le milieu de $[CH]$.



c) Propriétés

Dans tout le paragraphe, A, B et C sont trois points quelconques, α, β et γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et $G = \text{Bar}\,\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\,;(C,\gamma)\}$

Homogénéité

Propriété

Soit k un réel. Si $k \neq 0$ alors $G = \text{Bar}\,\{(A,k\alpha)\,;(B,k\beta)\,;(C,k\gamma)\}$.

Démonstration

Si $k \neq 0$ alors :

$$\begin{aligned} G = \text{Bar}\,\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\,;(C,\gamma)\} &\iff \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \\ &\iff k(\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}) = k\,\overrightarrow{0} \\ &\iff k\alpha\overrightarrow{GA}+k\beta\overrightarrow{GB}+k\gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \\ &\iff G = \text{Bar}\,\{(A,k\alpha)\,;(B,k\beta)\,;(C,k\gamma)\}\end{aligned}$$

Position du barycentre

Propriété

Si A, B et C ne sont pas alignés alors $G \in (ABC)$. Autrement dit, A, B, C et G sont coplanaires.

Démonstration

$G = \text{Bar}\,\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\,;(C,\gamma)\} \iff \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

Les vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont donc coplanaires. Ainsi les points A, B, C et G sont coplanaires.

Propriété

Réciproquement, si A, B et C ne sont pas alignés, alors tout point du plan (ABC) est le barycentre de A, B et C affectés de coefficients bien choisis.

Démonstration

Si $M \in (ABC)$ alors il existe des réels k et k' tel que :

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{MB} + k'\overrightarrow{AM} + k'\overrightarrow{MC}$$

On a alors $(1-k-k')\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} + k'\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$

donc $M = \text{Bar}\,\{(A, 1-k-k')\,;(B,k)\,;(C,k')\}$.

Isobarycentre

Propriété

Si $\alpha = \beta = \gamma$, alors G est appelé isobarycentre de A, B et C. G est alors le centre de gravité du triangle ABC.

Démonstration

Soient I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[AC]$.

On a alors $I = \text{Bar}\,\{(B,1)\,;(C,1)\}$ et $J = \text{Bar}\,\{(A,1)\,;(C,1)\}$.

D'après la propriété d'associativité, on a, d'une part, $G = \text{Bar}\,\{(I,2)\,;(A,1)\}$ donc $G \in (AI)$ et, d'autre part, $G = \text{Bar}\,\{(J,2)\,;(B,1)\}$ donc $G \in (BJ)$.

G appartient donc à deux médianes de ABC.

G est le centre de gravité de ABC.

Réduction vectorielle

Propriété

Quel que soit le point M, $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.

Démonstration

Quel que soit le point M,

$$\begin{aligned}
\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} &= \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + \gamma(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \\
&= \alpha\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{MG} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{MG} + \gamma\overrightarrow{GC} \\
&= (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG} + \underbrace{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC}}_{=\overrightarrow{0}} \\
&= (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}
\end{aligned}$$

d) Coordonnées du barycentre

Propriété

Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère du plan. Soit $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$.

Si $G = \text{Bar}\,\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\,;(C,\gamma)\}$ alors $G\left(\dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}; \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$

Dans un repère de l'espace, il suffit de faire le même calcul sur la troisième coordonnée.

La démonstration est identique au cas de deux points.

Exemple : Dans un repère du plan, on a $A(2;-1)$, $B(0;3)$ et $C(-2;0)$. Déterminer les coordonnées de G barycentre de $(A,1);(B,3);(C,-2)$.

On a :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + 3 \times x_B - 2 \times x_C}{1+3-2} = \dfrac{2 + 3 \times 0 - 2 \times (-2)}{2} = 3 \\ y_G = \dfrac{y_A + 3 \times y_B - 2 \times y_C}{1+3-2} = \dfrac{-1 + 3 \times 3 - 2 \times 0}{2} = 4 \end{cases}$$

Ainsi $G(3;4)$

3/ Barycentre d'un nombre quelconque de points

Toutes les définitions et propriétés précédentes se généralisent à n points pondérés.

- Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n points et $a_1, a_2, \dots, a_n$ n réels.
  Il existe un unique point G tel que $a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $a_1 + a_2 + \cdots a_n \neq 0$.
  Ce point est appelé barycentre des n points pondérés $(A_1, a_1); (A_2, a_2); \dots ; (A_n, a_n)$.
- Règle d'associativité :
  Pour trouver le barycentre G, de n points, lorsque $n \geqslant 3$, on peut remplacer p points, pris parmi les n points, par leur barycentre (s'il existe) affecté de la somme de leurs coefficients.
- Soit $k \neq 0$.
  $G = \mathrm{Bar}(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n) \iff G = \mathrm{Bar}(A_1, ka_1), (A_2, ka_2), \dots, (A_n, ka_n)$.
  Autrement dit, on ne change pas le barycentre en changeant les coefficients par des coefficients proportionnels.
- Si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n \neq 0$ alors G est appelé isobarycentre des n points $A_1, A_2, \dots, A_n$.
- Pour tout point M,
  $$a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{MA_n} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\overrightarrow{MG}$$
- Dans un repère, le barycentre de n points pondérés a pour coordonnées la moyenne des coordonnées des n points pondérés par les n coefficients.
  Dans le cas d'un repère du plan, on obtient :
  $$\begin{cases} x_G = \dfrac{a_1 x_{A_1} + a_2 x_{A_2} + \cdots + a_n x_{A_n}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \\ y_G = \dfrac{a_1 y_{A_1} + a_2 y_{A_2} + \cdots + a_n y_{A_n}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \end{cases}$$

Chapitre 7

Produit scalaire

Dans tout le chapitre, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ désignent deux vecteurs du plan.
Une unité de longueur est fixée.

1/ Définition

Définition

On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre réel noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ et défini par :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \begin{cases} \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) & \text{si } \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \text{ et } \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0} \\ 0 & \text{si } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

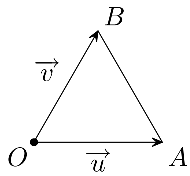
Le produit scalaire d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ par lui-même ($\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$) est appelé carré scalaire de $\overrightarrow{u}$ et se note $\overrightarrow{u}^2$.

Remarque : Le produit scalaire est donc une opération dont les arguments sont des vecteurs et dont le résultat est réel.

Exemple : Sur la figure ci-contre, le triangle OAB est équilatéral et $OA = 2$.
Calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$.

On a $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 2$ et $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \dfrac{\pi}{3}$

Ainsi $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 2 \times 2 \times \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2 \times 2 \times \dfrac{1}{2} = 2$



2/ Autres expressions du produit scalaire

a) Cas des vecteurs colinéaires

Propriété

– Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens alors

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$$

– Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de sens contraires alors

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$$

Démonstration

– Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 0$
Ainsi, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos 0 = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$

– Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de sens contraires, alors $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \pi$
Ainsi, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\pi = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$

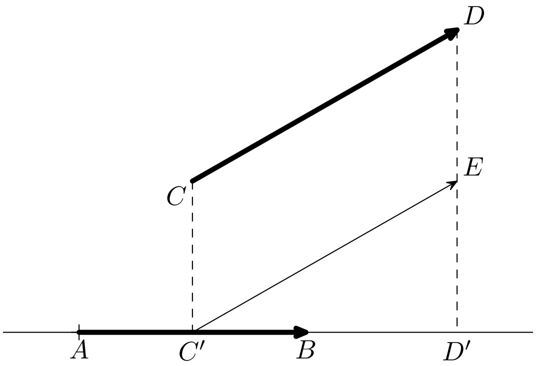
Conséquences :

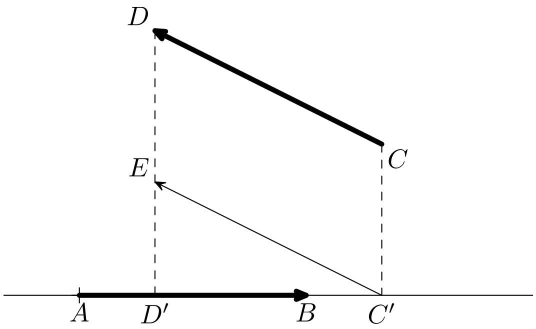
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} > 0$ et si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et sens contraires alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} < 0$
- Quel que soit le vecteur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$

b) Avec des projetés orthogonaux

Propriété

Soient A, B, C et D quatre points du plan.
Si C' et D' sont les projeté orthogonaux de C et D sur (AB) alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$



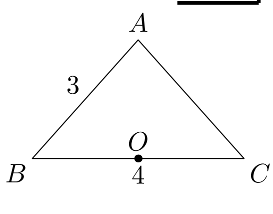


Démonstration

Soit E le point tel que $\overrightarrow{C'E} = \overrightarrow{CD}$.
On a alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'E} = AB \times C'E \times \cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{C'E})$.

- Si l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{C'E})$ est droit alors $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{C'E}) = \cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = 0$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'} = 0$.
- Si l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{C'E})$ est aigu alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ sont colinéaires et de même sens et $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{C'E}) = \dfrac{C'D'}{C'E}$
  Ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB \times C'E \times \dfrac{C'D'}{C'E} = AB \times C'D' = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$.
- Si l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{C'E})$ est obtus alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ sont colinéaires et de sens contraires et $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{C'E}) = -\dfrac{C'D'}{C'E}$
  Ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -AB \times C'E \times \dfrac{C'D'}{C'E} = -AB \times C'D' = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$.

Exemple : ABC est un triangle isocèle en A tel que $AB = 3$ et $BC = 4$.
O est le milieu du segment $[BC]$. Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}$.



Le projeté orthogonal de A sur (BC) est O donc
$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} = BO \times BC = 2 \times 3 = 6$
Le projeté orthogonal de A sur (BC) est O donc
$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CO}.\overrightarrow{BC} = -CO \times BC = -2 \times 3 = -6$

c) Dans un repère

Propriété

Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal du plan.
Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$.

Démonstration

Soit A le point tel que $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{u}$ et B le point tel que $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{v}$.

1/ Cas des vecteurs colinéaires.

Il existe k tel que $\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}$. Ainsi $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

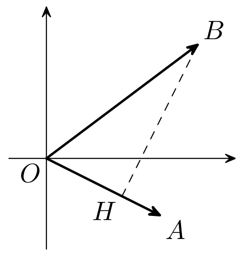
- Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires et de même sens alors $k>0$ et $OB=kOA$.
  On a alors $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=OA\times OB=k\times OA\times OA=kOA^2$.
- Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires et de même sens contraire alors $k<0$ et $OB=-kOA$.
  On a alors $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=-OA\times OB=k\times OA\times OA=kOA^2$.

Ainsi $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=k(x^2+y^2)=kxx+kyy=xx'+yy'$

2/ Cas des vecteurs quelconques.

Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA).
On a alors, d'après ce qui précède,

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}=xx_H+yy_H$$



En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles OBH et ABH rectangles en H, on obtient :

$$BH^2=OB^2-OH^2=AB^2-AH^2$$

ce qui nous donne :

$$x'^2+y'^2-x_H^2-y_H^2=(x-x')^2+(y-y')^2-(x-x_H)^2-(y-y_H)^2$$

puis, en simplifiant :

$$0=-2xx'-2yy'+2xx_H+2yy_H$$

soit :

$$xx_H+yy_H=xx'+yy'$$

On en déduit donc : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=xx'+yy'$.

Exemple : Dans un repère orthonormal $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$

Calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$ *et* $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$.

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=6\times3+3\times(-1)=18-3=15$
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}=6\times(-2)+3\times2=-12+6=-6$
$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}=3\times(-2)+(-1)\times2=-6-2=-8$

3/ Règles de calcul

Propriété

Quels que soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:
- $\overrightarrow{0}.\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}.\overrightarrow{0}=0$
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$ (On dit que le produit scalaire est symétrique)
- $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})=\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v})=k\times(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$
- $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$ et $(k\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v}=k\times(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$

(On dit que le produit scalaire est bilinéaire)

Démonstration

- Le premier résultat est une conséquence directe de la définition.
- Le deuxième résultat est aussi une conséquence de la définition ($\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=\cos(\overrightarrow{v};\overrightarrow{u})$).

– On se place dans un repère orthonormal du plan et on pose $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$

  Les coordonnées de $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$ sont $\begin{pmatrix}x'+x''\\y'+y''\end{pmatrix}$.
  On a ainsi, $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = x(x'+x'')+y(y'+y'') = xx'+xx''+yy'+yy''$.
  De plus $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = xx'+yy'+xx''+yy''$.
  Conclusion : $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$
  Les coordonnées de $k\overrightarrow{v}$ sont $\begin{pmatrix}kx'\\ky'\end{pmatrix}$.
  On a ainsi $\overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) = x(kx')+y(ky') = kxx'+kyy'$.
  De plus $k\times(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) = k(xx'+yy') = kxx'+kyy'$
  Conclusion $\overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) = k\times(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$
– Le quatrième résultat se démontre en utilisant les deux précédents.

Exemple : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs, simplifier $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2$, $(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2$ et $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})$.

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 &= (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).\overrightarrow{v}\\
&= \overrightarrow{u}^2+\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}^2 = \overrightarrow{u}^2+2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2\\
(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2 &= (\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}).\overrightarrow{u}-(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}).\overrightarrow{v}\\
&= \overrightarrow{u}^2-\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}^2 = \overrightarrow{u}^2-2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2\\
(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) &= \overrightarrow{u}^2-\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}^2 = \overrightarrow{u}^2-\overrightarrow{v}^2
\end{aligned}$$

4/ Vecteurs orthogonaux

a) Définition

Définition

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si :

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v}=\overrightarrow{0} \text{ ou } (OA)\perp(OB)$$

b) Propriété

Propriété

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=0$.

Démonstration

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=0 &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=0\\
&\Leftrightarrow \|\overrightarrow{u}\|=0 \text{ ou } \|\overrightarrow{v}\|=0 \text{ ou } \cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=0\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{u}=\overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v}=\overrightarrow{0} \text{ ou } (\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=\frac{\pi}{2}+k\times2\pi\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux}
\end{aligned}$$

Exemple : Dans un repère orthonormal $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$, on donne $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix}$.
Démontrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 6\times6+4\times(-9) = 36-36 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont donc orthogonaux.

Chapitre 8

Applications du produit scalaire

1/ Équations de droites

a) Définition

Définition

Un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ est dit normal à une droite d si la direction de $\overrightarrow{n}$ est orthogonale à celle de d.

b) Propriétés

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

1/ Une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ a une équation de la forme $ax+by+c=0$ avec $c \in \mathbb{R}$.

2/ Étant donnés trois réels a, b et c où a et b ne sont pas nuls simultanément, l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $ax+by+c=0$ est une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Démonstration

1/ Soit d une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et soit $A(x_0; y_0) \in d$.

Soit $M(x;y)$, on a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$

$M(x;y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow (x-x_0)a + (y-y_0)b = 0 \Leftrightarrow ax+by+c=0$ avec $c = -ax_0 - by_0$.

2/ Soit d l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax+by+c=0$ et soit $A(x_A, y_A) \in d$.

$M(x;y) \in d \Leftrightarrow ax+by+c = 0 = ax_A + by_A + c$

$\Leftrightarrow a(x-x_A) + b(y-y_A) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{n}.\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n}$

$\Leftrightarrow M$ appartient à la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

Exemple : Dans un repère orthonormal, on considère les points $A(3;-1)$ et $B(2;4)$. Déterminer une équation de la médiatrice m de $[AB]$.

La médiatrice de [AB] est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu I de $[AB]$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ donc une équation de m est de la forme $-x+5y+c=0$.

De plus, $I\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right) \in m$ donc $-\frac{5}{2}+5\times\frac{3}{2}+c=0$ donc $c=-5$.
Une équation de m est donc $-x+5y-5=0$.

2/ Équations de cercles

a) Forme générale

Propriété

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormal.
Une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(x_A;y_A)$ et de rayon R est

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$$

Démonstration

$M(x;y)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow AM=R \Leftrightarrow AM^2=R^2 \Leftrightarrow (x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$.

Exemple : Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormal.
Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M(x;y)$ tels que $x^2+y^2-6x+2y+5=0$?

$$\begin{aligned} M(x;y)\in\mathscr{E} &\Leftrightarrow x^2+y^2-6x+2y+5=0 \Leftrightarrow x^2-6x+y^2+2y+5=0\\ &\Leftrightarrow (x-3)^2-9+(y+1)^2-1+5=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=5\end{aligned}$$

$\mathscr{E}$ est donc le cercle de centre $C(3;-1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

b) Cercle de diamètre donné

Propriété

On considère deux points A et B du plan. Le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

Démonstration

$$M\in\mathscr{C} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ll} & M=A\\ \text{ou} & M=B\\ \text{ou} & AMB \text{ est un triangle rectangle en } M\end{array}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0.$$

Exemple : Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormal.
Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ avec $A(2;2)$ et $B(6;-2)$.

Soit $M(x;y)$. On a $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}2-x\\2-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}6-x\\-2-y\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M(x;y)\in\mathscr{C} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow (2-x)(6-x)+(2-y)(-2-y)=0\\ &\Leftrightarrow 12-8x+x^2-4-2y+2y+y^2=0\end{aligned}$$

Une équation de $\mathscr{C}$ est donc $x^2+y^2-8x+8=0$.

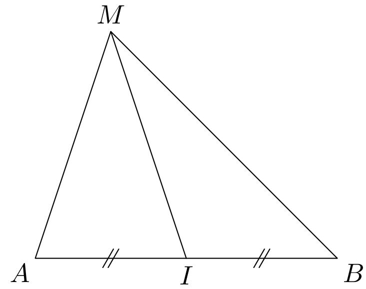
3/ Longueurs et angles dans un triangle

a) Théorème de la médiane

Propriété

On considère deux points A et B du plan et I le milieu de $[AB]$. Pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$$



Démonstration

$$\begin{aligned} MA^2+MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2 \\ &= \overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}^2 \\ &= 2MI^2+2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})+IA^2+IB^2 \end{aligned}$$

Or I est le milieu de $[AB]$ donc $IA = IB = \frac{1}{2}AB$ donc $IA^2 = IB^2 = \frac{1}{4}AB^2$

De plus $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.

Ainsi $MA^2+MB^2 = 2MI^2+2\times\frac{1}{4}AB^2 = 2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$.

Exemple : ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 12$. Calculer AI où I est le milieu de $[BC]$.

D'après le théorème de la médiane : $AB^2+AC^2 = 2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$.

On a donc $2AI^2 = 6^2+8^2-\frac{1}{2}\times 12^2 = 28$.

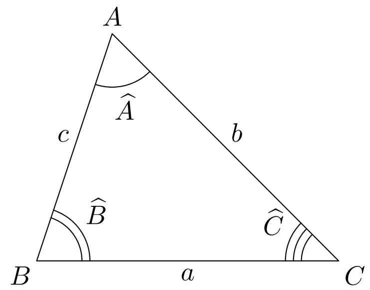
Ainsi $AI = \sqrt{14}$.

b) Formules d'Al Kashi

Propriété

On considère un triangle ABC. On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{C} = \widehat{ACB}$. On a :

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos(\widehat{A}) \\ b^2 &= a^2+c^2-2ac\cos(\widehat{B}) \\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos(\widehat{C}) \end{aligned}$$



Démonstration

$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2 = BA^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Ainsi $BC^2 = AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$ soit $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos(\widehat{A})$

Exemple : ABC est un triangle tel que $AC = 9$, $AB = 5$ et $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$. Calculer BC.

D'après la formule d'Al Kashi :

$BC^2 = AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos(\widehat{A}) = 5^2+9^2-2\times5\times9\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 61$

Ainsi $BC = \sqrt{61}$

c) Aire d'un triangle

Propriété

On considère un triangle ABC et on appelle S son aire. Avec les notations ci-dessus, on a :

$$S = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}ac\sin(\widehat{B}) = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C})$$

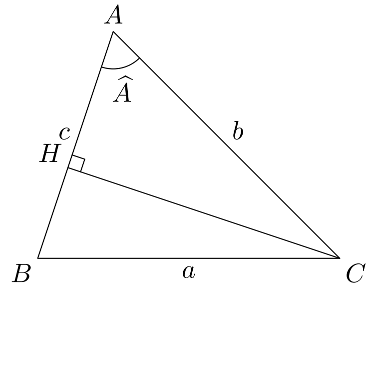
Démonstration

Soit H le projeté orthogonal de C sur AB. On a alors $S = \frac{1}{2}AB\times CH$.

Si l'angle $\widehat{A}$ est aigu alors $CH = AC\sin(\widehat{A})$.

Si l'angle $\widehat{A}$ est obtus alors $CH = AC\sin(\pi-\widehat{A}) = AC\sin(\widehat{A})$

Dans tous les cas $S = \frac{1}{2}AB\times AC\times\sin(\widehat{A})$.



d) Formule des sinus

Propriété

On considère un triangle ABC. Avec les notations ci-dessus, on a :

$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$$

Démonstration

On a $S = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}ac\sin(\widehat{B}) = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C})$

donc $\dfrac{2S}{abc} = \dfrac{\sin(\widehat{A})}{a} = \dfrac{\sin(\widehat{B})}{b} = \dfrac{\sin(\widehat{C})}{c}$

ainsi $\dfrac{a}{\sin(\widehat{A})} = \dfrac{b}{\sin(\widehat{B})} = \dfrac{c}{\sin(\widehat{C})}$.

Exemple : ABC est un triangle tel que $BC = 5$, $\widehat{B} = 50°$ et $\widehat{C} = 75°$. Calculer AB et AC et donner les valeurs arrondies au dixième.

$\widehat{A} = 180° - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 55°$

$\dfrac{AB}{\sin(\widehat{C})} = \dfrac{AC}{\sin(\widehat{B})} = \dfrac{BC}{\sin(\widehat{A})} \Leftrightarrow \dfrac{AB}{\sin(75°)} = \dfrac{AC}{\sin(50°)} = \dfrac{5}{\sin(55°)}$

On a donc $AB = \dfrac{5\sin(75°)}{\sin(55°)} \simeq 5,9$ et $AC = \dfrac{5\sin(50°)}{\sin(55°)} \simeq 4,7$.

Chapitre 9

Angles orientés

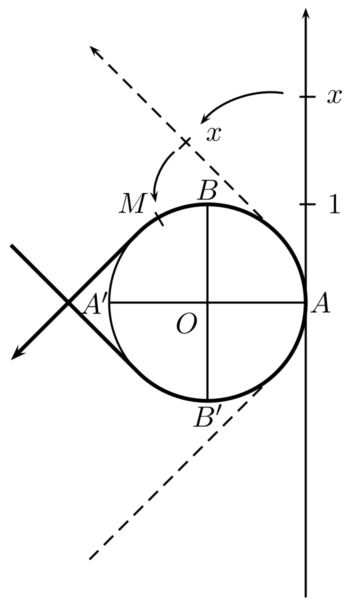
1/ Définitions

Une unité de longueur est choisie.

a) Cercle trigonométrique, mesures d'un arc

Définition

On appelle cercle trigonométrique un cercle de rayon 1, muni d'une origine et orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Ce sens est appelé sens direct ou sens trigonométrique.
Soit $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique de centre O et d'origine A. À tout réel x, on peut associer un unique point M du cercle en « enroulant » la droite des réels autour du cercle. On dit que x est une mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{AM}$.



Remarque : Un point correspond à une infinité de réels.

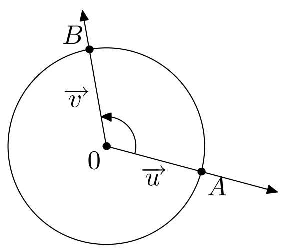
Exemple : Le point A est associé aux réels 0, 2π, 4π, -2π... Le point B est associé aux réels $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$... Le point A' est associé aux réels π, 3π, $-\pi$...

b) Mesures d'un angle orienté de vecteurs

Étant donnés deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O, on appelle A le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite $(O, \overrightarrow{u})$ et B le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite $(O, \overrightarrow{v})$.

Définition

On appelle mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ toute mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$.
Si x est une de ces mesures, toute autre mesure s'écrit $y = x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
On note (de façon abusive) : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = x + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.



Définition

On appelle mesure principale de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, l'unique mesure appartenant à $]-\pi;\pi]$.

Exemple : Déterminer la mesure principale d'un angle dont une mesure est $\dfrac{126\pi}{5}$

$$\frac{126\pi}{5} = \frac{12\times 10\pi + 6\pi}{5} = 12\times 2\pi + \frac{6\pi}{5} = 12\times 2\pi + 2\pi - \frac{4\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5} + 13\times 2\pi$$

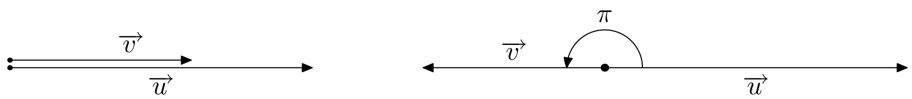
La mesure principale de cet angle est donc $\dfrac{-4\pi}{5}$.

2/ Propriétés

a) Angles et colinéarité

Propriété

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens si et seulement si $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = 0 + 2k\pi$.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de sens contraires si et seulement si $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \pi + 2k\pi$.

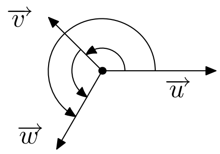


b) Relation de Chasles

Propriété

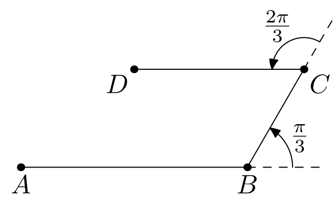
Pour tous vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$:

$$(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}) + 2k\pi$$



Exemple : Dans la figure suivante, démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) &= (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}) + 2k\pi \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi = \pi + 2k\pi\end{aligned}$$



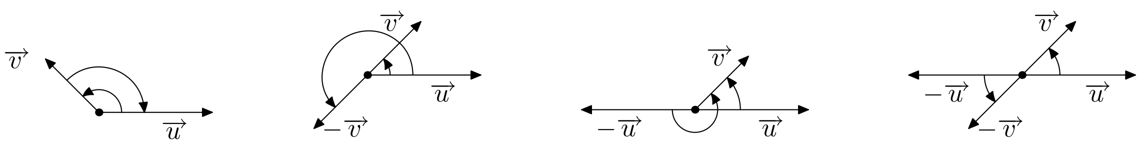
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc colinéaires.
Conclusion : (AB) et (CD) sont parallèles.

Conséquences :

Propriété

Pour tous vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

$(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}) = -(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) + 2k\pi$	(1)	$(\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) + \pi + 2k\pi$	(2)
$(-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) + \pi + 2k\pi$	(3)	$(-\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) + 2k\pi$	(4)



Démonstration

(1) : $(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}) + 2k\pi = 2k\pi$ ainsi $(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}) = -(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) + 2k\pi$
(2) : $(\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v},-\overrightarrow{v}) + 2k\pi = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) + \pi + 2k\pi$
(3) se démontre comme (2).

$$\begin{aligned}(4) : (-\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v}) &= (-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) + \pi + 2k\pi \text{ d'après (2)} \\ &= (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) + \pi + \pi + 2k\pi \text{ d'après (3)}\end{aligned}$$

ainsi $(-\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) + 2k\pi$

Chapitre 10

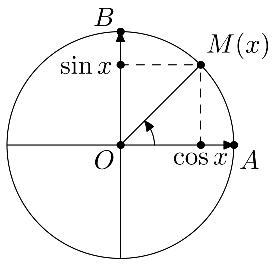
Trigonométrie

1/ Lignes trigonométriques

a) Cosinus et sinus

Rappels

Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal direct (c'est-à-dire tel que $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$), $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.
A et B sont les points tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\jmath}$.



Définition

Pour tout réel x, il existe un unique point M de $\mathscr{C}$ tel que x soit une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM})$.
$\cos x$ est l'abscisse de M dans $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.
$\sin x$ est l'ordonnée de M dans $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

Propriétés immédiates

Propriété

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$	$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$	$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$	

Cosinus et sinus d'un angle orienté de vecteurs

Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un angle orienté et x une de ses mesures. Les autres mesures de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sont donc de la forme $x + 2k\pi$. Or $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$. On a donc la définition suivante :

Définition

Le cosinus (resp. le sinus) d'un angle orienté de vecteurs est le cosinus (resp. le sinus) d'une quelconque de ses mesures.

b) Angles associés

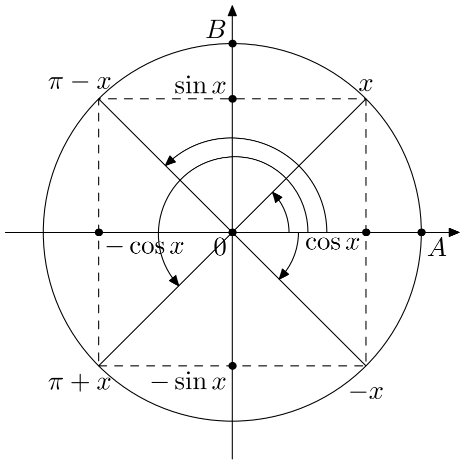
L'utilisation de symétries dans le cercle trigonométrique permet d'établir :

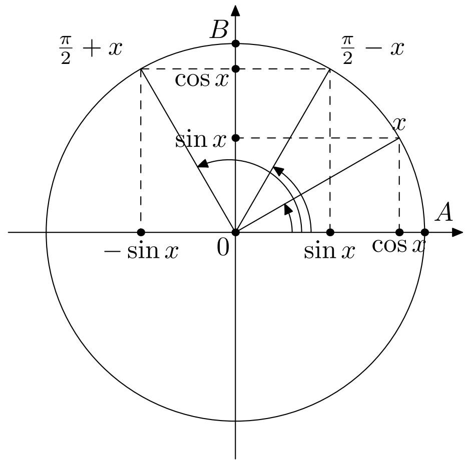
Propriété

Pour tout réel x,

$$\begin{cases}\cos(-x)=\cos x\\ \sin(-x)=-\sin x\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos(x+\pi)=-\cos x\\ \sin(x+\pi)=-\sin x\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos(\pi-x)=-\cos x\\ \sin(\pi-x)=\sin x\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x\\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\cos x\end{cases}$$





c) Valeurs particulières

À l'aide de considérations géométriques, on peut obtenir les valeurs suivantes :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

d) Formules d'addition

Propriété

Quels que soient les nombres réels a et b,

$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$ (1) $\quad$ $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$ (3)

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ (2) $\quad$ $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$ (4)

Démonstration

(1) : Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormal, $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O et A et B les points de $\mathscr{C}$ tels que $(\vec{\imath},\overrightarrow{OA})=a$ et $(\vec{\imath},\overrightarrow{OB})=b$.

Calculons de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$

– $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=OA\times OB\times\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$

Or $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OA},\vec{\imath})+(\vec{\imath},\overrightarrow{OB})+2k\pi=-a+b+2k\pi$ et $OA=OB=1$

Ainsi $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=1\times1\times\cos(b-a)=\cos(a-b)$

– Les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ sont $\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et les coordonnées de $\overrightarrow{OB}$ sont $\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$

On a donc : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \cos a\cos b + \sin a \sin b$

Conclusion : $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

(2) : $\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos a\cos(-b) + \sin a\sin(-b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

(3) : $\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

(4) : $\sin(a+b) = \sin(a-(-b)) = \sin a\cos(-b) - \cos a\sin(-b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

e) Formules de duplication

Propriété

Quel que soit le réel x,

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \qquad (5)$$

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x \qquad (6)$$

Démonstration

(5) : Quel que soit le réel x,

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x\cos x - \sin x\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

En utilisant les relations $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ et $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, on obtient successivement :

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \quad \text{puis} \quad \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

(6) : Quel que soit le réel x,

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x\cos x + \cos x\sin x = 2\sin x\cos x$$

2/ Résolution d'équations

Propriété

Quels que soient les réels a et b,

$\cos a = \cos b \Leftrightarrow \left|\text{ou}\begin{array}{l} a = b + k\times 2\pi \\ a = -b + k\times 2\pi\end{array}\right.$ et $\sin a = \sin b \Leftrightarrow \left|\text{ou}\begin{array}{l} a = b + k\times 2\pi \\ a = \pi - b + k\times 2\pi\end{array}\right.$

Exemple : Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi[$ *l'équation* $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left|\text{ou}\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k\times 2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k\times 2\pi\end{array}\right.$$

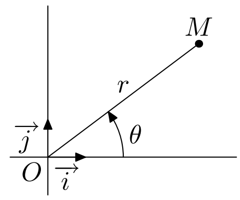
$$\Leftrightarrow \left|\text{ou}\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\times 2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k\times 2\pi\end{array}\right.$$

Sur l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi[$, on a $\mathscr{S} = \{\frac{\pi}{2}; -\frac{5\pi}{6}\}$

3/ Repérage polaire

a) Coordonnées polaires d'un point

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormal direct. Si M est un point distinct du point O alors M peut-être repéré par l'angle $\theta = (\vec{\imath},\overrightarrow{OM})$ et la longueur $r = OM$.
Réciproquement, la donnée d'un couple $(r;\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ détermine un seul point M tel que $\theta = (\vec{\imath},\overrightarrow{OM})$ et $r = OM$.



Définition

Pour tout point M distinct de O, un couple $(r;\theta)$ tel que $\theta = (\vec{\imath},\overrightarrow{OM})$ et $r = OM$ est appelé couple de coordonnées polaires de M dans le repère polaire $(O,\vec{\imath})$.

b) Lien entre coordonnées cartésiennes et polaires

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormal direct.

Propriété

Si M est un point ayant pour coordonnées cartésiennes $(x;y)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et pour coordonnées polaires $(r;\theta)$ alors :

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \ ; \qquad x = r\cos\theta \ ; \qquad y = r\sin\theta$$

Démonstration

Notons $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O. La demi-droite $[OM)$ coupe $\mathscr{C}$ en N. On a donc $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{ON}$.
$N \in \mathscr{C}$ donc ses coordonnées cartésiennes sont $(\cos\theta;\sin\theta)$. Celles de M sont donc $(r\cos\theta; r\sin\theta)$.
Par unicité des coordonnées, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.
De plus $OM^2 = x^2+y^2$ et $OM = r$ donc $r^2 = x^2+y^2$.

Chapitre 11

Suites numériques

1/ Généralités

a) Définition

Définition

Une suite est une fonction définie sur $\mathbb{N}$. Une suite numérique est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$.
L'image de n par une suite u se note u_n et est appelé terme de rang n de la suite. Une suite u est aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque : On peut aussi définir une suite à partir d'un certain rang.

Exemple :

1/ u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n+2}$. $\quad u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_1 = \dfrac{1}{3}$, $u_2 = \dfrac{1}{4}$, ...

2/ v définie pour tout $n \geqslant 3$ par $v_n = \dfrac{1}{n-2}$ $\quad v_3 = 1$, $v_4 = \dfrac{1}{2}$, $v_5 = \dfrac{1}{3}$, ...

b) Comment générer une suite

Selon le contexte les termes d'une suite peuvent être définis de différentes façons.

Explicitement en fonction du rang

– Toute fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ (ou sur un intervalle de la forme $[a\ ;\ +\infty[$) permet de définir une suite.

Exemple : Calculer les premiers termes de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 5n - 1$.
$u_0 = 2\times 0^2 - 5\times 0 - 1 = -1$; $u_1 = 2\times 1^2 - 5\times 1 - 1 = -4$;
$u_2 = 2\times 2^2 - 5\times 2 - 1 = -3$; $u_3 = 2\times 3^2 - 5\times 3 - 1 = 2$;
$u_4 = 2\times 4^2 - 5\times 4 - 1 = 11$

– Les propriétés des nombres entiers permettent aussi de définir explicitement des suites qui ne peuvent pas être obtenues simplement par une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Exemple : Calculer les premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $u_n = (-1)^n$ et v_n est le nombre de diviseurs de n.

$u_0 = 1$; $u_1 = -1$; $u_2 = 1$; $u_3 = -1$; ...

$v_1 = 1$; $v_2 = 2$; $v_3 = 2$; $v_4 = 3$; $v_5 = 2$; $v_6 = 4$ ...

Par récurrence

Une suite peut aussi être définie par son premier terme (ou ses premiers termes) et par une relation permettant de calculer chaque terme en fonction du précédent (ou des précédents).

Exemple : Calculer les premiers termes des suites ci-dessous définies sur $\mathbb{N}$.

u est définie par $\begin{cases} u_0 = -6 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n - 1 \quad \text{pour tout } n \geqslant 0 \end{cases}$

$u_1 = -\frac{1}{2}u_0 - 1 = -\frac{1}{2} \times (-6) - 1 = 2$; $u_2 = -\frac{1}{2}u_1 - 1 = -\frac{1}{2} \times 2 - 1 = -2$

$u_3 = -\frac{1}{2}u_2 - 1 = -\frac{1}{2} \times (-2) - 1 = 0$; $u_4 = -\frac{1}{2}u_3 - 1 = -\frac{1}{2} \times 0 - 1 = -1$

v est définie par $\begin{cases} v_0 = 1 \;;\; v_1 = 1 \\ v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \quad \text{pour tout } n \geqslant 0 \end{cases}$

$v_2 = v_1 + v_0 = 1 + 1 = 2$; $v_3 = v_2 + v_1 = 2 + 1 = 3$;
$v_4 = v_3 + v_2 = 3 + 2 = 5$; $v_5 = v_4 + v_3 = 5 + 3 = 8$;
$v_6 = v_5 + v_4 = 8 + 5 = 13$

w est définie par $\quad w_0 = 3 \quad$ *et* $\begin{cases} w_{n+1} = \frac{w_n}{2} & \text{si } w_n \text{ est pair} \\ w_{n+1} = 3w_n + 1 & \text{si } w_n \text{ est impair} \end{cases}$

$w_1 = 3 \times w_0 + 1 = 3 \times 3 + 1 = 10$; $w_2 = \frac{w_1}{2} = \frac{10}{2} = 5$; $w_3 = 3 \times w_2 + 1 = 3 \times 5 + 1 = 16$;
$w_4 = \frac{w_3}{2} = \frac{16}{2} = 8$; $w_5 = \frac{w_4}{2} = \frac{8}{2} = 4$; $w_6 = \frac{w_5}{2} = \frac{4}{2} = 2$

2/ Sens de variation

a) Définition

Une suite étant une fonction, les définitions restent les mêmes :

u est croissante (strict. croissante) si $n < p \Longrightarrow u_n \leqslant u_p$ ($n < p \Longrightarrow u_n < u_p$)
u est décroissante (strict. décroissante) si $n < p \Longrightarrow u_n \geqslant u_p$ ($n < p \Longrightarrow u_n > u_p$)

Cependant, les propriétés des nombres entiers permettent d'établir les résultats suivants :

Propriété

u est croissante si et seulement si pour tout entier n, $u_n \leqslant u_{n+1}$
u est décroissante si et seulement si pour tout entier n, $u_n \geqslant u_{n+1}$

Remarques :
- Ne pas mélanger u_{n+1} et $u_n + 1$
- Dans la pratique, pour déterminer le sens de variation d'une suite, on s'intéresse au signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
- Dans le cas où tous les termes de la suite sont strictement positifs, on peut aussi comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Exemple : Déterminer le sens de variation des suites suivantes :
- *u est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n + (-1)^n$.*

  Étudions la différence $u_{n+1} - u_n$:
  $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + (-1)^{n+1} - 3n - (-1)^n = 3 - 2 \times (-1)^n > 0$
  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
- *v est définie sur $\mathbb{N}$ par* $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = -v_n^2 + v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

  Étudions la différence $v_{n+1} - v_n$:
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = -v_n^2 + v_n - v_n = -v_n^2 < 0$
  La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

– *w est définie sur $\mathbb{N}^*$ par* $w_n = \dfrac{2^n}{n}$.

Les termes de la suite sont strictement positifs, on étudie donc le quotient $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{\dfrac{2^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{2^n}{n}} = \dfrac{2^{n+1}}{2^n} \times \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{2n}{n+1}$

Pour tout $n \geqslant 1$, $2n \geqslant n+1$ donc $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} \geqslant 1$.

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.

b) Propriété

Propriété

Soit f une fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ et u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.
Si f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ alors u est croissante.
Si f est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ alors u est décroissante.

La démonstration de cette propriété est immédiate en utilisant la définition.

Exemple : Déterminer le sens de variation de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (n+3)^2$.

La fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = (x+3)^2$ est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ (polynôme du second degré...) donc la suite u est croissante.

3/ Limites

a) Suites convergentes

Définition

Une suite u converge vers un réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On dit alors que u est convergente et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

On peut formuler la définition comme suit :

– u converge vers ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini.
– u converge vers ℓ si pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe un entier n_0 tel que $n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \in I$.

Propriété

Si une suite converge alors sa limite est unique.

Démonstration

Soit u une suite convergente. Supposons qu'elle admette deux limites distinctes ℓ et ℓ' avec $\ell < \ell'$.

Soit d un réel positif inférieur à $\dfrac{\ell'-\ell}{2}$.

On pose $I =]\ell - d\ ;\ \ell + d[$ et $I' =]\ell' - d\ ;\ \ell' + d[$.

On a $d < \dfrac{\ell'-\ell}{2}$ donc $2d < \ell' - \ell$ soit $d + d < \ell' - \ell$.

On en déduit que $\ell + d < \ell' - d$

Ainsi, I et I' sont deux intervalles disjoints et ils contiennent respectivement ℓ et ℓ'.

Si u converge vers ℓ, l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un rang n_0.

Si u converge vers ℓ', l'intervalle I' contient tous les termes de la suite à partir d'un rang n_1.
Ainsi pour tout n supérieur à n_0 et n_1, u_n doit appartenir à la fois à I et I' ce qui est impossible car ces intervalles sont disjoints.
Conclusion : u ne peut pas admettre deux limites distinctes. La limite d'une suite est unique.

b) Suites divergentes

Une suite divergente est une suite qui n'est pas convergente.

Suites de limite infinie

Définition

Une suite u a pour limite $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A\ ;\ +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On dit alors que u diverge vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
On définit de la même façon une suite qui diverge vers $-\infty$

Suites qui n'ont pas de limite

Une suite n'est pas nécessairement convergente ou divergente vers l'infini. Il existe des suites qui n'ont pas de limite. Elles sont aussi appelées suites divergentes.

Exemples : u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$. *v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n\sin(n)$.*

c) Propriétés

Propriété

Soit f une fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ et soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Conséquence : Toutes les propriétés vues sur les limites de fonctions s'appliquent aux suites définies par $u_n = f(n)$.

Exemple : Déterminer la limite de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{-2n^2+n}{3n^2+1}$.

Pour tout $n > 0$, $u_n = \dfrac{-2n^2+n}{3n^2+1} = \dfrac{n^2\left(-2+\dfrac{1}{n}\right)}{n^2\left(3+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{-2+\dfrac{1}{n}}{3+\dfrac{1}{n^2}}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} -2+\dfrac{1}{n} = -2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3+\dfrac{1}{n^2} = 3\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\frac{2}{3}$$

Théorème des gendarmes

Propriété

On considère trois suites u, v et w et un réel ℓ.

Si $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \quad \text{à partir d'un certain rang} \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Démonstration
Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ.
u converge vers ℓ donc I contient tous ses termes à partir d'un certain rang n_0.
w converge vers ℓ donc I contient tous ses termes à partir d'un certain rang n_1.
À partir d'un certain rang n_2, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Ainsi, pour tout n supérieur à la fois à n_0, n_1 et n_2, tous les termes de v appartiennent à I.
Conclusion : v converge vers ℓ.

Exemple : Déterminer la limite de la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \quad & -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 \\ & -\frac{1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{1}{n} \\ & 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2 + \frac{(-1)^n}{n} \leqslant 2 + \frac{1}{n} \\ & 2 - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 2 + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{1}{n} = 2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{n} = 2 \end{array}\right\} \text{donc, d'après le théorème des gendarmes, } \lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

4/ Suites arithmétiques

a) Définition

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et r un réel.
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r si pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemples :
La suite des nombres impairs est une suite arithmétique de raison 2.
Les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 4$ et $v_n = n^2 + 2$ sont-elles arithmétiques ?

- Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 4 - (3n-4) = 3n + 3 - 4 - 3n + 4 = 3$.
  La suite u est donc arithmétique de raison 3.
- $v_0 = 2$, $v_1 = 3$, $v_2 = 6$ ainsi $v_1 = v_0 + 1$ et $v_2 = v_1 + 3$
  La suite v n'est donc pas arithmétique.

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.
Si $r > 0$ alors u est strictement croissante.
Si $r = 0$ alors u est constante.
Si $r < 0$ alors u est strictement décroissante.

Démonstration immédiate (Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = r$...)

b) Expression de u_n en fonction de n

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.
Pour tous entiers naturels n et p :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

En particulier, pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 + nr$$

Démonstration

On suppose $n > p$. On a :
$u_n - u_{n-1} = r\,;\quad u_{n-1} - u_{n-2} = r\,;\quad \dots\quad u_{p+2} - u_{p+1} = r\,;\quad u_{p+1} - u_p = r$
En additionnant toutes ces égalités, on obtient :

$$u_n - u_p = (n-p)r$$

soit

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

c) Somme de termes consécutifs

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.
Pour tout entier naturel n :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Remarque : On a aussi $u_1 + u_2 \cdots + u_{n-1} + u_n = n \times \dfrac{u_1 + u_n}{2}$

Démonstration

Posons $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
On a ainsi $2S = (u_0+u_n)+(u_1+u_{n-1})+(u_2+u_{n-2})+\cdots+(u_{n-1}+u_1)+(u_n+u_0)$
Or, pour tout $k \leqslant n$, $u_k + u_{n-k} = u_0 + kr + u_0 + (n-k)r = u_0 + u_0 + nr = u_0 + u_n$.
On a donc : $2S = (n+1) \times (u_0 + u_n)$
Donc $S = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$

Exemple : Déterminer la somme des n premiers nombres impairs.

La suite des nombres impairs est la suite arithmétique de raison 2 telle que $u_1 = 1$

$$u_1 + u_2 \cdots + u_{n-1} + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2} = n \times \frac{u_1 + u_1 + (n-1)r}{2} = n \times \frac{2 + 2n - 2}{2} = n^2$$

5/ Suites géométriques

a) Définition

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et q un réel.
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison q si pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Remarque : Si $q \neq 0$ et $u_0 \neq 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.

Exemple :
La suite des puissances de 2 est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.
Les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -4 \times 3^n$ et $v_n = n^2 + 1$ sont-elles géométriques ?

Pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{-4 \times 3^{n+1}}{-4 \times 3^n} = 3$.
La suite u est donc géométrique de raison 3.
$v_0 = 1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 5$ ainsi $v_1 = 2 \times v_0$ et $v_2 = 2{,}5 \times v_1$
La suite v n'est donc pas géométrique.

b) Expression de u_n en fonction de n

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.
Pour tous entiers naturels n et p :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

En particulier, pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Démonstration

On suppose $n > p$. On a :

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = q\,; \qquad \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} = q\,; \qquad \dots \qquad \frac{u_{p+2}}{u_{p+1}} = q\,; \qquad \frac{u_{p+1}}{u_p} = q$$

En multipliant toutes ces égalités, on obtient :
$\dfrac{u_n}{u_p} = q^{n-p}$ soit $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 0$.

Si $q > 1$ alors $\begin{cases} \text{si } u_0 > 0,\ u \text{ est strictement croissante.} \\ \text{si } u_0 < 0,\ u \text{ est strictement décroissante.} \end{cases}$

Si $q = 1$ alors u est constante.

Si $0 < q < 1$ alors $\begin{cases} \text{si } u_0 > 0,\ u \text{ est strictement décroissante.} \\ \text{si } u_0 < 0,\ u \text{ est strictement croissante.} \end{cases}$

Si $q < 0$ alors u n'est pas monotone.

Démonstration

Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 \times q^n(q-1)$
Le signe de $u_{n+1} - u_n$ s'obtient donc en fonction du signe de u_0, du signe de q^n et du signe de $q - 1$.

c) Somme de termes consécutifs

Propriété

Soit q un réel différent de 1.
Pour tout entier naturel n :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$.
Pour tout entier naturel n :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration

Posons $S = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+q^n$. On a alors $qS = q+q^2+q^3+\cdots+q^n+q^{n+1}$
Ainsi, $S - qS = 1 - q^{n+1}$
D'où : $S = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exemple : Déterminer la somme des n premières puissances de 2 $(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})$*).*

La suite des puissances de 2 est la suite géométrique de raison 2 et telle que $u_0 = 1$

Ainsi, $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times \dfrac{1-q^n}{1-q} = 1 \times \dfrac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$

d) Limites

Propriété

Soit q un réel.

Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.

Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Si $q \leqslant -1$ alors q^n n'a pas de limite.

Remarque : Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors $u_n = u_0 q^n$. Le théorème précédent permet donc de trouver la limite d'une suite géométrique.

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$

Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.

On a $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

Or $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} = 2$

Chapitre 12

Probabilités

1/ Introduction

a) Expérience aléatoire

Définition

Une expérience dont on connaît les issues (les résultats) est appelée expérience aléatoire si on ne peut pas prévoir ni calculer l'issue qui sera réalisée.
L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire (aussi appelés éventualités) est appelé univers de l'expérience. On le note souvent Ω. Le nombre de ses éléments est appelé cardinal et se note Card Ω.

Exemple : jeu de Pile ou Face, nombre obtenu suite au lancer d'un dé, nombre tiré au sort dans une loterie, couleur de la prochaine voiture qui passera dans la rue, vingt et unième mot d'un livre choisi au hasard...

b) Loi de probabilité

Définition

Définir une loi de probabilité sur un univers $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ c'est associer à chaque éventualité x_i un nombre p_i positif ou nul, appelé probabilité de l'éventualité x_i, tel que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

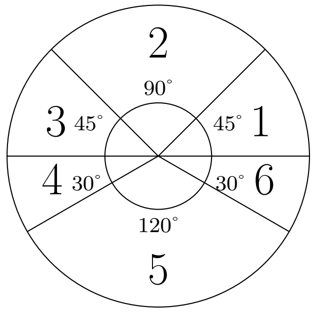
Conséquence : Pour tout i, $p_i \leqslant 1$.

c) Modélisation - Loi des grands nombres

Définition

Modéliser une expérience aléatoire d'univers Ω c'est choisir une loi de probabilité sur Ω qui représente le « mieux possible » la situation.

Exemple : On considère la roue de loterie suivante. L'expérience consiste à faire tourner la roue et à noter le nombre sur lequel elle s'arrête. Définir une loi de probabilité permettant de modéliser l'expérience.



L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

On associe à l'éventualité 1 la probabilité $p_1 = \frac{45}{360} = \frac{1}{8}$.

On fait de même pour les autres éventualités. On obtient le tableau suivant :

Éventualité	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

Toutes les expériences ne sont pas aussi simples à modéliser que le lancer d'un dé équilibré. Cependant, pour construire ou valider un modèle, on dispose du résultat théorique ci-dessous appelé « Loi des grands nombres » :

Propriété

On considère une expérience d'univers Ω qui suit une loi de probabilité P. La fréquence d'obtention de chaque résultat x_i lorsqu'on réalise n fois l'expérience tend vers la probabilité de x_i lorsque n devient grand.

Exemple : Si l'on réalise un très grand nombre de fois l'expérience précédente (la roue de loterie), la fréquence d'obtention de « 1 » va se rapprocher de $\frac{1}{8}$, la fréquence d'obtention de « 2 » va se rapprocher de $\frac{1}{4}$, la fréquence d'obtention de « 3 » va se rapprocher de $\frac{1}{8}$...

Si, lors du lancer d'un dé, les fréquences d'apparition de chacune des faces ne se rapprochent pas de $\frac{1}{6}$, il est vraisemblable que le dé ne soit pas correctement équilibré.

2/ Vocabulaire des évènements

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω.

a) Définitions

Définition

On appelle évènement toute partie de Ω.
Un évènement élémentaire est un évènement qui ne contient qu'un seul élément.
L'univers Ω contient tous les résultats possibles, on l'appelle évènement certain.
L'ensemble vide $\varnothing$ ne contient aucun résultat, on l'appelle évènement impossible.

Exemple : On reprend la situation précédente.
Déterminer la liste des éventualités des évènements suivants

A : « On obtient un nombre pair »
B : « On obtient un nombre supérieur ou égal à 3 »
C : « On obtient un multiple de 5 »
D : « On obtient un nombre négatif ».

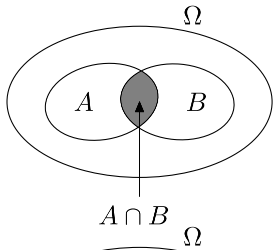
$A = \{2 ; 4 ; 6\}$
$B = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
$C = \{5\}$
$D = \varnothing$

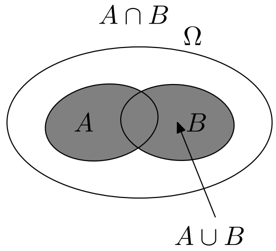
b) Intersection - Réunion

A et B sont deux évènements de Ω.

Définition

On appelle intersection de A et B l'évènement noté $A \cap B$ composé des éventualités qui appartiennent à la fois à A et à B.
Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont incompatibles.
On appelle réunion de A et B l'évènement noté $A \cup B$ composé des éventualités qui appartiennent à A ou à B (c'est-à-dire qui appartiennent à au moins l'un des deux).





Exemple : On reprend la situation précédente. Décrire par une phrase et déterminer les éventualités des évènements $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $B \cup C$.

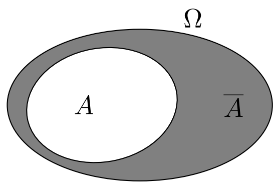
- $A \cap B$: « On obtient un nombre pair et supérieur ou égal à 3. »
  $A \cap B = \{4 \; ; \; 6\}$
- $A \cup B$: « On obtient un nombre pair ou supérieur ou égal à 3. »
  $A \cup B = \{2 \; ; \; 3 \; ; \; 4 \; ; \; 5 \; ; \; 6\}$
- $A \cap C$: « On obtient un nombre pair et multiple de 5. »
  $A \cap C = \varnothing$
- $B \cup C$: « On obtient un nombre supérieur ou égal à 3 ou multiple de 5. »
  $B \cup C = \{3 \; ; \; 4 \; ; \; 5 \; ; \; 6\}$

c) Évènement contraire

A est un évènement de Ω.

Définition

On appelle contraire de A l'évènement noté $\overline{A}$ constitué de toutes les éventualités qui n'appartiennent pas à A.



Exemple : On reprend la situation précédente. Décrire par une phrase et déterminer les éventualités des évènements $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$.

- $\overline{A}$: « On obtient un nombre impair. »
  $\overline{A} = \{1 \; ; \; 3 \; ; \; 5\}$
- $\overline{B}$: « On obtient un nombre strictement inférieur à 3. »
  $\overline{B} = \{1 \; ; \; 2\}$
- $\overline{C}$: « On obtient un nombre qui n'est pas multiple de 5. »
  $\overline{C} = \{1 \; ; \; 2 \; ; \; 3 \; ; \; 4 \; ; \; 6\}$

3/ Calcul des probabilités

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω muni d'une loi de probabilité.

a) Probabilité d'un évènement

Définition

Soit A un évènement de Ω. On appelle probabilité de A la somme des probabilités des éventualités qui le composent. On la note $P(A)$.

Conséquences :
$P(\varnothing) = 0$ $\qquad$ $P(\Omega) = 1$ $\qquad$ Pour tout évènement A, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Exemple : On reprend la situation précédente. Déterminer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.

- $P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$
- $P(B) = P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{8}$
- $P(B) = P(\{5\}) = \frac{1}{3}$

b) Propriétés

Propriété

Quels que soient les évènements A et B de Ω :
- Si $A \cap B = \varnothing$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$

Exemple : On reprend la situation précédente. Déterminer $P(A \cup C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(\overline{A})$ et $P(\overline{C})$.

- $A \cap C = \varnothing$ donc $P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{5}{12} + \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$
- $A \cap B = \{4\ ;\ 6\}$ donc $P(A \cap B) = P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{12} + \frac{5}{8} - \frac{1}{6} = \frac{7}{8}$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$ et $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

c) Loi équirépartie

Définition

On dit que P est une loi équirépartie si toutes les éventualités ont la même probabilité. Cette probabilité est alors égale à $\frac{1}{\text{Card } \Omega}$

Exemple : On lance un dé équilibré et on s'intéresse au nombre obtenu. Définir une loi de probabilité permettant de modéliser l'expérience.

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Le fait que le dé soit bien équilibré justifie le choix de la loi équirépartie. On obtient donc le tableau suivant :

Éventualité	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Soit A un évènement de Ω.

Propriété

Si P est une loi équirépartie alors

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre total de cas}}$$

Exemple : Dans le cas du lancer de dé équilibré, déterminer les probabilités de A : « On obtient un nombre pair », B : « On obtient un nombre supérieur ou égal à 3 » et C : « On obtient un multiple de 5 »

$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad P(B) = \frac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $\quad P(C) = \frac{\text{Card } C}{\text{Card } \Omega} = \frac{1}{6}$

4/ Paramètres d'une loi de probabilité

On considère une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ dont les éventualités sont des nombres réels. Ω est muni d'une loi de probabilité P. On pose $p_i = P(x_i)$.

Définition

On appelle espérance de la loi de probabilité le réel μ défini par :

$$\mu = p_1x_1 + \cdots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i$$

C'est la moyenne des x_i avec les coefficients p_i.
On appelle variance de la loi de probabilité le réel V défini par :

$$V = p_1(x_1-\mu)^2 + \cdots + p_n(x_n-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-\mu)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i{x_i}^2\right) - \mu^2$$

On appelle écart-type de la loi de probabilité le réel σ défini par $\sigma = \sqrt{V}$

Exemple : On reprend la situation de la roue de loterie.

Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la loi de probabilité.

- Espérance : $\mu = \frac{1}{8}\times1+\frac{1}{4}\times2+\frac{1}{8}\times3+\frac{1}{12}\times4+\frac{1}{3}\times5+\frac{1}{12}\times6 = \frac{3}{24}+\frac{12}{24}+\frac{9}{24}+\frac{8}{24}+\frac{40}{24}+\frac{12}{24} = \frac{84}{24} = \frac{7}{2}$
- Variance : $V = \frac{1}{8}\times\left(1-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\times\left(2-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\times\left(3-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\times\left(4-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\times\left(5-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\times\left(6-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\times\left(-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\times\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\times\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{32}+\frac{9}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{48}+\frac{9}{12}+\frac{25}{48} = \frac{8}{3}$
- Écart-type : $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{8}{3}} \simeq 1,63$

5/ Variables aléatoires

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω muni d'une loi de probabilité P.

a) Définitions

Définition

Une variable aléatoire X sur Ω est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. X associe donc à toute éventualité de Ω un unique réel.

Remarque : On utilise les variables aléatoires quand on s'intéresse plus à un nombre associé au résultat de l'expérience (par ex. un gain...) qu'au résultat lui-même.

Exemple : On lance trois fois une pièce de monnaie et on s'intéresse au côté sur lequel elle tombe. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque éventualité associe le nombre de fois où PILE *apparaît.*

Déterminer l'univers Ω de cette expérience puis décrire X.

En notant P et F les résultats possibles d'un lancer, on obtient :

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$$

X est la fonction définie sur Ω par :

$$\begin{array}{llll} X(PPP)=0 & X(PPF)=1 & X(PFP)=1 & X(PFF)=2 \\ X(FPP)=1 & X(FPF)=2 & X(FFP)=2 & X(FFF)=3 \end{array}$$

Définition

Soit X une variable aléatoire sur Ω et soit $x \in \mathbb{R}$. L'évènement formé des éventualités ω_i de Ω telles que $X(\omega_i) = x$ se note $(X = x)$.

Exemple : On reprend la situation précédente.

Déterminer l'ensemble $(X = 2)$.

Avec les notations précédentes, on a : $(X = 2) = \{PFF, FPF, FFP\}$

b) Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition

Soit X une variable aléatoire sur Ω. On appelle $\Omega' = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X. On peut définir sur Ω' une loi de probabilité en associant à chaque valeur x_i la probabilité de l'évènement $(X = x_i)$. Cette loi est appelée loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exemple : On reprend la situation précédente.
Déterminer la loi de probabilité de X.

La loi de probabilité P sur Ω est une loi équirépartie. On a donc :

$$P(X=0) = P(\{PPP\}) = \frac{1}{8} \qquad P(X=1) = P(\{PPF, PFP, FPP)\} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = P(\{PFF, FPF, FFP)\} = \frac{3}{8} \qquad P(X=3) = P(\{FFF\}) = \frac{1}{8}$$

On peut aussi résumer ceci sous forme de tableau :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

c) Paramètres d'une variable aléatoire

Définition

L'espérance, la variance, l'écart-type d'une variable aléatoire sont respectivement l'espérance, la variance, l'écart-type de sa loi de probabilité.
Si X prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots x_n$ et si on pose $p_i = P(X = x_i)$, on a :
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i; \quad V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2; \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exemple : On reprend la situation précédente.
Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

- Espérance : $E(X) = \frac{1}{8} \times 0 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$
- Variance : $V(X) = \frac{1}{8} \times \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \times \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \times \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \times \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} \times \frac{9}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{9}{4} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$
- Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,87$

Chapitre 13

Transformations du plan et de l'espace

Dans tout le chapitre, on se place dans le plan ou dans l'espace.

1/ Généralités

a) Transformations

Définition

On appelle transformation du plan (ou de l'espace) toute application bijective du plan (ou de l'espace). Autrement dit :
– une transformation associe à tout point M un point M' appelé image de M.
– tout point N est l'image d'un et d'un seul point appelé antécédent de N.

Définition

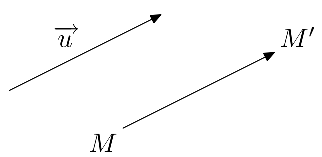
Soit f une transformation. Un point invariant de f est un point M tel que $f(M) = M$.

b) Translations

Définition

Définition

Étant donné un vecteur $\overrightarrow{u}$, on appelle translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ la transformation, notée $t_{\overrightarrow{u}}$ qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.



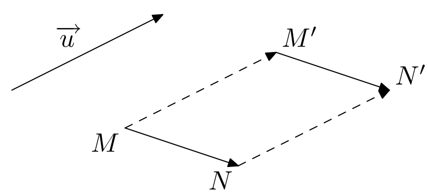
Remarques :
– $t_{\overrightarrow{0}}$ est l'identité. Tous les points sont invariants (confondus avec leur image).
– Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ alors $t_{\overrightarrow{u}}$ n'a pas de point invariant.

Propriété

Propriété

Si M' et N' sont les images respectives de deux points M et N par une translation alors :

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}.$$



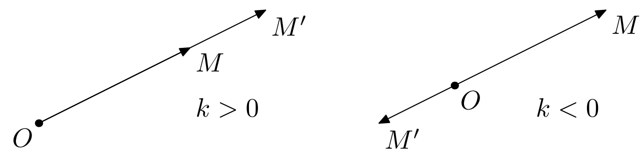
Démonstration
$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{u}$ donc $MNN'M'$ est un parallélogramme.
Ainsi $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

c) Homothéties

Définition

Définition

Étant donnés un point O et un réel k non nul, on appelle homothétie de centre O et de rapport k la transformation, notée $h(O,k)$ qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.



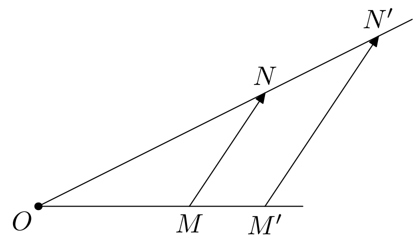
Remarques :
- Une homothétie de rapport 1 est l'identité.
- L'homothétie de centre O est de rapport -1 est la symétrie de centre O.
- Si $k \neq 1$, le seul point invariant de $h(O,k)$ est O.
- Le centre d'une homothétie, un point et son image sont alignés.
- La transformation réciproque de $h(O,k)$ est $h\left(O, \frac{1}{k}\right)$

Propriété fondamentale

Propriété

Si M' et N' sont les images respectives de deux points M et N par une homothétie de rapport k alors :

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}.$$



Démonstration
Soit O le centre de l'homothétie, on a alors :
$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{MO} + k\overrightarrow{ON} = k(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}) = k\overrightarrow{MN}$

2/ Propriétés

Dans ce paragraphe, f désigne une translation ou une homothétie du plan ou de l'espace.

a) Propriétés de conservation

Conservation du barycentre

Propriété

On considère trois points A, B et G et leurs images A', B' et G' par f.

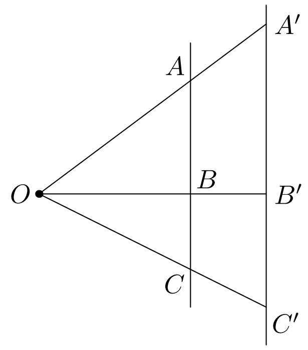
$$\text{Si } G = \text{Bar}\left\{(A,a)\,;(B,b)\right\} \text{ alors } G' = \text{Bar}\left\{(A',a)\,;(B',b)\right\}.$$

Remarque : La propriété précédente s'étend au cas du barycentre de n points en utilisant l'asociativité du barycentre.

Démonstration
Soit k le rapport de f. On pose $k = 1$ si f est une translation.
Si $G = \text{Bar}\{(A, a)\,;(B, b)\}$ alors $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.
On a de plus $\overrightarrow{G'A'} = k\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{G'B'} = k\overrightarrow{GB}$.
Ainsi, $a\overrightarrow{G'A'} + b\overrightarrow{G'B'} = ak\overrightarrow{GA} + bk\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$. $G' = \text{Bar}\{(A', a)\,;(B', b)\}$.

Conséquences :

Propriété
Lorsque trois points sont alignés, leurs images par f sont aussi trois points alignés.
Lorsque quatre points sont coplanaires, leurs images par f sont aussi quatre points coplanaires.



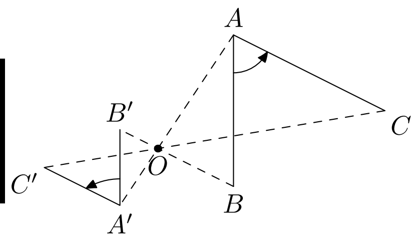
Démonstration
On utilise la propriété précédente et le fait que si trois points sont alignés alors l'un est le barycentre des deux autres et que si quatre points sont coplanaires alors l'un est le barycentre des trois autres.

Propriété
Si deux points A et B ont pour images A' et B' par f alors l'image du milieu de $[AB]$ est le milieu de $[A'B']$.

Démonstration
On utilise la propriété précédente et le fait que le milieu d'un segment est l'isobarycentre des extrémités du segment.

Conservation des angles orientés

Propriété
On considère trois points A, B et C et leurs images A', B' et C' par f.
$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + k \times 2\pi$$



Démonstration
Si f est une homothétie, on appelle k son rapport ; si f est une translation, on pose $k = 1$.
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) &= (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'C'}) + k \times 2\pi \\ &= (k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, k\overrightarrow{AC}) + k \times 2\pi\end{aligned}$$
Si $k > 0$ alors $(k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = 0 + k \times 2\pi$ et $(\overrightarrow{AC}, k\overrightarrow{AC}) = 0 + k \times 2\pi$.
Si $k < 0$ alors $(k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = \pi + k \times 2\pi$ et $(\overrightarrow{AC}, k\overrightarrow{AC}) = \pi + k \times 2\pi$.
On a alors : $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + k \times 2\pi$

Conséquences :

Propriété
Si quatre points A, B, C et D ont pour images A', B', C' et D' par f et si $(AB) /\!/ (CD)$ alors $(A'B') /\!/ (C'D')$.

b) Effet sur les longueurs, les aires et les volumes

Propriété

Une translation conserve les longueurs, les aires et les volumes.
Par une homothétie de rapport k, les longueurs sont multipliées par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.

Démonstration

Cas des longueurs.
Si f est une homothétie, on appelle k son rapport ; si f est une translation, on pose $k = 1$.
Quels que soient les points A et B et leurs images A' et B', $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. On a donc :

$$A'B' = \left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| = \left\|k\overrightarrow{AB}\right\| = |k| \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = |k|AB$$

3/ Images des figures usuelles

Dans ce paragraphe, f désigne une translation ou une homothétie de rapport k du plan ou de l'espace. On posera $k = 1$ si f est une translation.

a) Image d'une droite, d'un plan

Propriété

L'image d'une droite d par f est une droite d' parallèle à d.
L'image d'un plan P par f est un plan P' parallèle à P.

Démonstration

Cas d'une droite d.
Soient A et B deux points de d et leurs images A' et B'.

$$\begin{aligned} M \in d &\Leftrightarrow \text{Il existe } a \text{ et } b \text{ tels que } M = \text{Bar}\{(A,a)\,;(B,b)\} \\ &\Leftrightarrow \text{Il existe } a \text{ et } b \text{ tels que } M' = \text{Bar}\{(A',a)\,;(B',b)\} \\ &\Leftrightarrow M' \in (A'B') \end{aligned}$$

L'image de d est donc une droite d'.
De plus $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ donc $(A'B') /\!\!/ (AB)$.

b) Image d'un segment

Propriété

On considère deux points A et B et leurs images A' et B' par f.
L'image du segment $[AB]$ par f est le segment $[A'B']$.

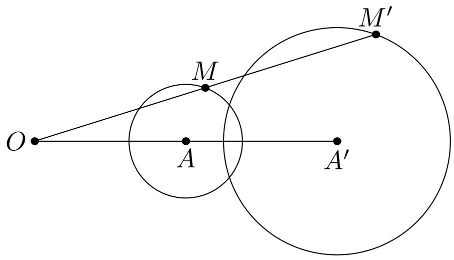
Démonstration

$$\begin{aligned} M \in [AB] &\Leftrightarrow \text{Il existe } a > 0 \text{ et } b > 0 \text{ tels que } M = \text{Bar}\{(A,a)\,;(B,b)\} \\ &\Leftrightarrow \text{Il existe } a > 0 \text{ et } b > 0 \text{ tels que } M' = \text{Bar}\{(A',a)\,;(B',b)\} \\ &\Leftrightarrow M' \in [A'B'] \end{aligned}$$

c) Image d'un cercle

Propriété

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre A et de rayon R et soit A' l'image de A par f. L'image de $\mathscr{C}$ par f est le cercle $\mathscr{C}'$ de centre A' et de rayon $|k|R$.



Démonstration

$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow AM = R \Leftrightarrow A'M' = |k|R \Leftrightarrow M'$ appartient au cercle de centre A' et de rayon $|k|R$.

Chapitre 14

Statistiques

1/ Généralités

Une étude statistique descriptive s'effectue sur une population (des personnes, des villes, des objets...) dont les éléments sont des individus et consiste à observer et étudier un même aspect sur chaque individu, nommé caractère (taille, nombre d'habitants, consommation...).
Il existe deux types de caractères :

1/ *quantitatif* : c'est un caractère auquel on peut associer un nombre c'est-à-dire, pour simplifier, que l'on peut mesurer. On distingue alors deux types de caractères quantitatifs :
   - *discret* : c'est un caractère quantitatif qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Par exemple le nombre d'enfants d'un couple.
   - *continu* : c'est un caractère quantitatif qui, théoriquement, peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle de l'ensemble des nombres réels. Ses valeurs sont alors regroupées en classes. Par exemple la taille d'un individu, le nombre d'heures passées devant la télévision.

2/ *qualitatif* : comme la profession, la couleur des yeux, la nationalité. Dans ce dernier cas, « nationalité française », « nationalité allemande » etc. sont les modalités du caractère.

En général une série statistique à caractère discret se présente sous la forme :

Valeurs	x_1	x_2	....	x_p
Effectifs	n_1	n_2	....	n_p
Fréquences	f_1	f_2	....	f_p

On écrira souvent : la série (x_i, n_i). (On n'indique pas le nombre de valeurs lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté). Souvent on notera N l'effectif total de cette série donc $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$.
Lorsqu'une série comporte un grand nombre de valeurs, on cherche à la résumer, si possible, à l'aide de quelques nombres significatifs appelés paramètres.
La suite du cours présente quelques paramètres permettant de résumer des séries à caractère quantitatif qui seront illustrés à l'aide des exemples suivants :
Série 1
Une étude sur le nombre d'employés dans les commerces du centre d'une petite ville a donné les résultats suivants :

Nombre d'employés	1	2	3	4	5	6	7	8
Effectif	11	18	20	24	16	14	11	6

Série 2
Une étude sur la durée de vie en heures de 200 ampoules électriques a donné les résultats suivants :

Durée de vie en centaine d'heures	[12 ; 13[	[13 ; 14[	[14 ; 15[	[15 ; 16[	[16 ; 17[
Effectif	28	46	65	32	29

2/ Paramètres de position

a) Paramètres de position de tendance centrale

Mode - Classe modale

Définition

Le mode d'une série statistique est la valeur du caractère qui correspond au plus grand effectif.
Dans le cas d'une série à caractère quantitatif continu dont les valeurs sont regroupées en classes, la classe modale est la classe de plus grand effectif.

Remarque : Il peut y avoir plusieurs modes ou classes modales.

Exemple : Déterminer le mode et la classe modale des séries 1 et 2.
Pour la série 1, le mode est 4.
Pour la série 2, la classe modale est l'intervalle $[14; 15[$.

Médiane

Définition

La médiane d'une série statistique est un réel noté M_e tel que au moins 50% des valeurs sont inférieures ou égales à M_e et au moins 50% des valeurs sont supérieures ou égales à M_e.

Dans le cas d'une série à caractère discret, la médiane s'obtient en ordonnant les valeurs dans l'ordre croissant et en prenant la valeur centrale si N est impair et la moyenne des valeurs centrales si N est pair.
Dans le cas d'une série à caractère continu, la médiane peut s'obtenir de manière graphique en prenant la valeur correspondant à $0,5$ sur le polygone des fréquences cumulées croissantes.

Exemple : Déterminer la médiane de la série 1 et la classe médiane de la série 2.
La médiane de la série 1 est 4 qui correspond à la moyenne de la soixantième et de la soixante et unième valeur.
La centième valeur de la série 2 appartient à l'intervalle $[14; 15[$ qui est donc la classe médiane.

Moyenne

Définition

La moyenne d'une série statistique (x_i, n_i) est le réel, noté $\bar{x}$ défini par :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_ix_i}{N}$$

Dans le cas d'une série à caractère quantitatif continu dont les valeurs sont regroupées en classes, x_i désigne le centre de chaque classe.

Exemple : Déterminer la moyenne des séries 1 et 2.

$$\bar{x}_1 = \frac{11 \times 1 + 18 \times 2 + 20 \times 3 + 24 \times 4 + 16 \times 5 + 14 \times 6 + 11 \times 7 + 6 \times 8}{11 + 18 + 20 + 24 + 16 + 14 + 11 + 6} = 4,1$$
$$\bar{x}_2 = \frac{28 \times 12,5 + 46 \times 13,5 + 65 \times 14,5 + 32 \times 15,5 + 29 \times 16,5}{28 + 46 + 65 + 32 + 29} = 14,44$$

b) Paramètres de position non centrale

Quartiles

Définition

Le premier quartile Q_1 est la plus petite valeur du caractère telle qu'au moins 25% des termes de la série aient une valeur qui lui soit inférieure ou égale.
Le troisième quartile Q_3 est la plus petite valeur du caractère telle qu'au moins 75% des termes de la série aient une valeur qui lui soit inférieure ou égale.

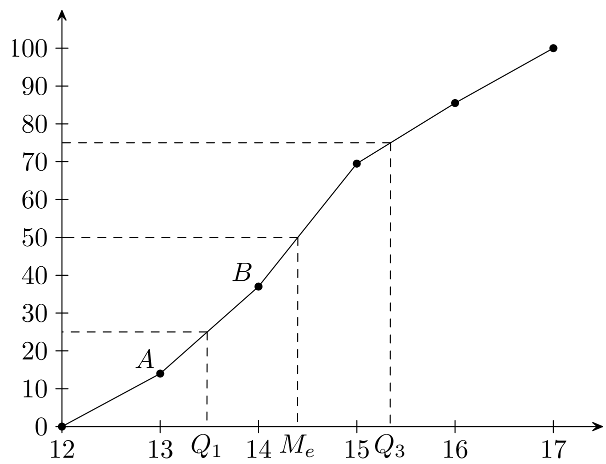
Dans le cas d'une série à caractère discret, les quartiles s'obtiennent en ordonnant les valeurs dans l'ordre croissant puis :
- Si N est multiple de 4 alors Q_1 est la valeur de rang $\frac{N}{4}$ et Q_3 est la valeur de rang $\frac{3N}{4}$.
- Si N n'est pas multiple de 4 alors Q_1 est la valeur de rang immédiatement supérieur à $\frac{N}{4}$ et Q_3 est la valeur de rang immédiatement supérieur à $\frac{3N}{4}$.

Exemple : Déterminer les quartiles de la série 1

Le nombre de données est multiple de 4 : 120. Le premier quartile est donc la 30e valeur et le troisième quartile la 90e valeur.
On a ainsi : $Q_1 = 3$ et $Q_3 = 6$.

Dans le cas d'une série à caractère continu, les quartiles peuvent s'obtenir à partir du polygone des fréquences cumulées croissantes où Q_1 est la valeur correspondant à la fréquence cumulée croissante égale $0,25$ et Q_3 est la valeur correspondant à la fréquence cumulée croissante égale $0,75$.

Exemple : Représenter le polygone des fréquences cumulées croissantes de la série 2. Déterminer graphiquement la médiane et les quartiles.



On obtient $Q_1 \simeq 13,5$, $M_e = 14,4$ et $Q_3 \simeq 15,3$

Exemple : Retrouver ces résultats par le calcul.

Le premier quartile est dans la classe $[13;14[$. En posant $A(13;14)$ et $B(14;37)$, Q_1 est le point de (AB) d'ordonnée 25.
Le coefficient directeur de (AB) est égal à $\frac{37-14}{14-13} = 23$ et l'ordonnée à l'origine se calcule en utilisant, par exemple, les coordonnées de A.
On obtient l'équation suivante : $(AB) : y = 23x - 285$

Q_1 étant le point de (AB) d'ordonnée 25, il est solution de l'équation $25 = 23Q_1 - 285$. On obtient $Q_1 = \dfrac{310}{23} \simeq 13,5$
Avec des raisonnements analogues, on obtient $M_e = 14,4$ et $Q_3 \simeq 15,3$

3/ Paramètres de dispersion

a) Étendue

Définition
L'étendue est la différence entre la plus grande valeur du caractère et la plus petite.

Remarque : L'étendue est très sensible aux valeurs extrêmes.

Exemple : Déterminer l'étendue des séries 1 et 2
L'étendue de la série 1 est $8 - 1 = 7$.
L'étendue de la série 2 est $17 - 12 = 5$.

b) Écart interquartile

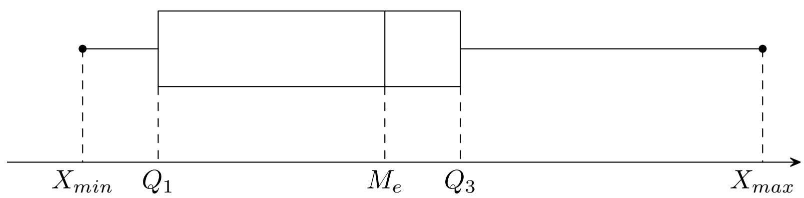
Définition
L'intervalle interquartile est l'intervalle $[Q_1; Q_3]$.
L'écart interquartile est le nombre $Q_3 - Q_1$. C'est la longueur de l'intervalle interquartile.

Remarque : Contrairement à l'étendue, l'écart interquartile élimine les valeurs extrêmes, ce peut être un avantage. En revanche il ne prend en compte que 50% de l'effectif, ce peut être un inconvénient.

Exemple : Déterminer l'intervalle interquartile et l'écart interquartile des séries 1 et 2.
Pour la série 1 : l'intervalle interquartile est $[3; 6]$. L'écart interquartile est donc 3.
Pour la série 2 : l'intervalle interquartile est $[13,5; 15,3]$. L'écart interquartile est donc 1,8.

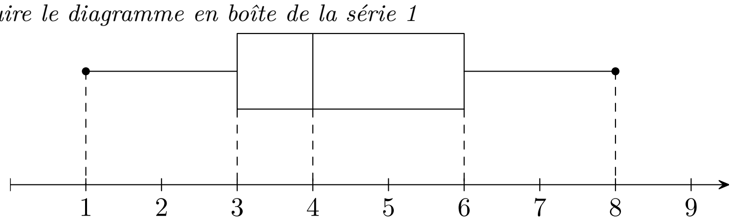
c) Diagramme en boîte

On construit un diagramme en boîte de la façon suivante :
- les valeurs du caractère sont représentées sur un axe (vertical ou horizontal) ;
- on place sur cet axe, le minimum, le maximum, les quartiles et la médiane de la série ;
- on construit alors un rectangle parallèlement à l'axe, dont la longueur est l'interquartile et la largeur arbitraire.



Remarque : Ce diagramme permet non seulement de visualiser la dispersion d'une série mais aussi de comparer plusieurs séries entre elles.

Exemple : Construire le diagramme en boîte de la série 1



d) Variance et écart-type

Pour mesurer la dispersion d'une série, on peut s'intéresser à la moyenne des distances des valeurs à la moyenne. On utilise plutôt les carrés des distances qui facilitent les calculs.

Définition

On appelle variance d'une série quelconque à caractère quantitatif discret le nombre :

$$V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{p} f_i(x_i - \bar{x})^2$$

On appelle écart-type de cette série le nombre $\sigma = \sqrt{V}$.

Dans le cas d'une série à caractère quantitatif continu dont les valeurs sont regroupées en classes, x_i désigne le centre de chaque classe.

Propriété

On peut calculer la variance de la façon suivante :

$$V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

Démonstration

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - 2n_i x_i \bar{x} + n_i \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - 2\bar{x} \times \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i + \bar{x}^2 \times \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 - \bar{x}^2 \end{aligned}$$

Exemple : Déterminer les variances et écart-types des séries 1 et 2.

Pour la série 1 : $V_1 = \dfrac{571}{150} \simeq 3,8$ et $\sigma_1 = \sqrt{V_1} \simeq 1,95$

Pour la série 2 : $V_2 = 1,5264$ et $\sigma_1 = \sqrt{V_2} \simeq 1,24$

Propriété

La fonction $g\ : t \longmapsto \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - t)^2$ admet un minimum atteint en $t = \bar{x}$ (la moyenne de la série) et ce minimum vaut V (la variance de la série).

Démonstration

Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - t)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - 2n_i x_i t + n_i t^2 \\ &= \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\right) t^2 - 2 \times \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i\right) t + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 = t^2 - 2\bar{x}t + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 \end{aligned}$$

g est un polynôme du second degré qui atteint son minimum en $\dfrac{2\bar{x}}{2} = \bar{x}$. Ce minimum est $g(\bar{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \bar{x})^2 = V$

4/ Influence d'une transformation affine

Propriété

Soit (x_i, n_i) une série statistique de médiane M_x, de quartiles Q_{1x} et Q_{3x}, de moyenne $\bar{x}$, de variance V_x et d'écart-type σ_x.
Si, pour tout i, $y_i = ax_i + b$, où a et b sont des réels, alors les paramètres de la série (y_i, n_i) sont :
- Médiane : $M_y = aM_x + b$
- Quartiles : Si $a > 0$, $Q_{1y} = aQ_{1x} + b$ et $Q_{3y} = aQ_{3x} + b$
- Moyenne : $\bar{y} = a\bar{x} + b$
- Variance : $V_y = a^2 V_x$
- Écart-type : $\sigma_y = |a|\sigma_x$

Exemple : Déterminer les paramètres de la série 2 où la durée de vie est exprimée en minutes au delà de 12 heures.

Les nouvelles valeurs de la série sont obtenues en appliquant aux valeurs de départ la transformation affine $x \mapsto 60x - 720$.
On obtient alors :
$M_y = 60M_x - 720 = 60 \times 14,4 - 720 = 144$
$Q_{1y} = 60Q_{1x} - 720 = 60 \times \frac{310}{23} - 720 \simeq 88,7$ et $Q_{3y} = 60Q_{3x} - 720 = 60 \times \frac{245,5}{16} - 720 \simeq 200,6$
$\bar{y} = 60\bar{x} - 720 = 146,4$
$V_y = 60^2 V_x = 5495,04$
$\sigma_y = 60\sigma_x \simeq 74,13$

5/ Résumé d'une série statistique

On résume souvent une série statistique par une mesure de tendance centrale associée à une mesure de dispersion. les plus utilisées sont les suivantes :
- Le couple *médiane ; écart interquartile.*
  Il est insensible aux valeurs extrêmes et permet de comparer rapidement deux séries (par exemple grâce au diagramme en boîte) mais sa détermination n'est pas toujours pratique car il faut classer les données et il n'est pas possible d'obtenir la médiane d'un regroupement de séries.
- Le couple *moyenne ; écart-type.*
  Il est sensible aux valeurs extrêmes mais se prête mieux aux calculs. On peut notamment obtenir la moyenne et l'écart-type d'un regroupement de séries connaissant la moyenne et l'écart-type des séries de départ.