Chapitre 10

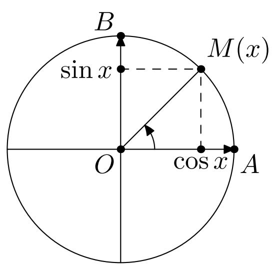
Trigonométrie

1/ Lignes trigonométriques

a) Cosinus et sinus

Rappels

Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal direct (c'est-à-dire tel que $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$), $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.
A et B sont les points tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\jmath}$.



Définition

Pour tout réel x, il existe un unique point M de $\mathscr{C}$ tel que x soit une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM})$.
$\cos x$ est l'abscisse de M dans $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.
$\sin x$ est l'ordonnée de M dans $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

Propriétés immédiates

Propriété

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ $\qquad$ $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ $\qquad$ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ $\qquad$ $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$

Cosinus et sinus d'un angle orienté de vecteurs

Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un angle orienté et x une de ses mesures. Les autres mesures de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sont donc de la forme $x + 2k\pi$. Or $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$. On a donc la définition suivante :

Définition

Le cosinus (resp. le sinus) d'un angle orienté de vecteurs est le cosinus (resp. le sinus) d'une quelconque de ses mesures.

b) Angles associés

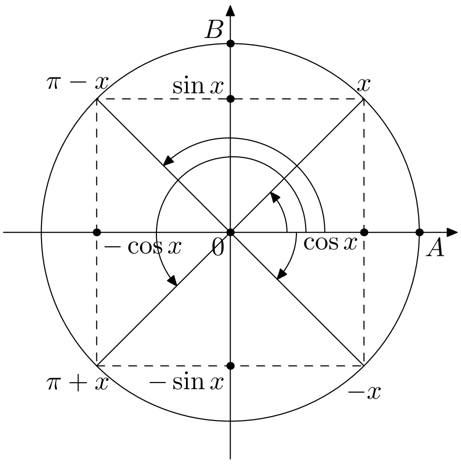
L'utilisation de symétries dans le cercle trigonométrique permet d'établir :

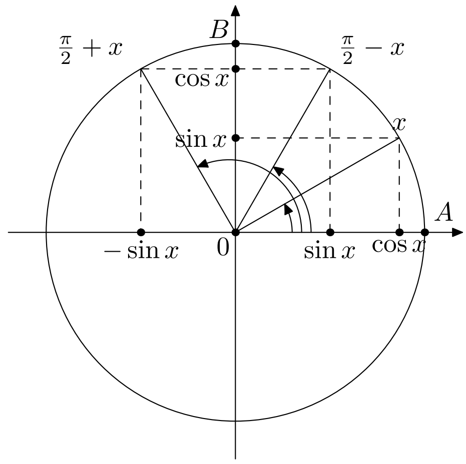
Propriété

Pour tout réel x,

$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(x+\pi) = -\cos x \\ \sin(x+\pi) = -\sin x \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \end{cases}$$





c) Valeurs particulières

À l'aide de considérations géométriques, on peut obtenir les valeurs suivantes :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

d) Formules d'addition

Propriété

Quels que soient les nombres réels a et b,

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ (1) $\quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ (3)

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ (2) $\quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ (4)

Démonstration

(1) : Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal, $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O et A et B les points de $\mathscr{C}$ tels que $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OA}) = a$ et $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OB}) = b$.

Calculons de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$

– $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

Or $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \vec{\imath}) + (\vec{\imath}, \overrightarrow{OB}) + 2k\pi = -a + b + 2k\pi$ et $OA = OB = 1$

Ainsi $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 1 \times 1 \times \cos(b-a) = \cos(a-b)$

– Les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ sont $\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et les coordonnées de $\overrightarrow{OB}$ sont $\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$

On a donc : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \cos a\cos b + \sin a \sin b$

Conclusion : $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

(2) : $\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos a\cos(-b) + \sin a\sin(-b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

(3) : $\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

(4) : $\sin(a+b) = \sin(a-(-b)) = \sin a\cos(-b) - \cos a\sin(-b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

e) Formules de duplication

Propriété

Quel que soit le réel x,

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \quad (5)$$

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x \quad (6)$$

Démonstration

(5) : Quel que soit le réel x,

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x\cos x - \sin x\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

En utilisant les relations $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ et $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, on obtient successivement :

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \quad \text{puis} \quad \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

(6) : Quel que soit le réel x,

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x\cos x + \cos x\sin x = 2\sin x\cos x$$

2/ Résolution d'équations

Propriété

Quels que soient les réels a et b,

$\cos a = \cos b \Leftrightarrow \left|\text{ou}\ \begin{array}{l} a = b + k\times 2\pi \\ a = -b + k\times 2\pi\end{array}\right.$ et $\sin a = \sin b \Leftrightarrow \left|\text{ou}\ \begin{array}{l} a = b + k\times 2\pi \\ a = \pi - b + k\times 2\pi\end{array}\right.$

Exemple : Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi[$ *l'équation* $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

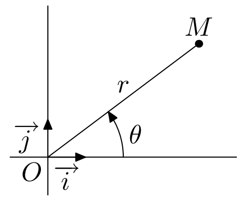
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left|\text{ou}\ \begin{array}{l} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k\times 2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k\times 2\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\text{ou}\ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\times 2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k\times 2\pi\end{array}\right.$$

Sur l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi[$, on a $\mathscr{S} = \{\frac{\pi}{2}; -\frac{5\pi}{6}\}$

3/ Repérage polaire

a) Coordonnées polaires d'un point



Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal direct. Si M est un point distinct du point O alors M peut-être repéré par l'angle $\theta = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM})$ et la longueur $r = OM$.
Réciproquement, la donnée d'un couple $(r; \theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ détermine un seul point M tel que $\theta = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM})$ et $r = OM$.

Définition

Pour tout point M distinct de O, un couple $(r; \theta)$ tel que $\theta = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM})$ et $r = OM$ est appelé couple de coordonnées polaires de M dans le repère polaire $(O, \overrightarrow{\imath})$.

b) Lien entre coordonnées cartésiennes et polaires

Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal direct.

Propriété

Si M est un point ayant pour coordonnées cartésiennes $(x; y)$ dans le repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et pour coordonnées polaires $(r; \theta)$ alors :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \;\; ; \qquad x = r\cos\theta \;\; ; \qquad y = r\sin\theta$$

Démonstration

Notons $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O. La demi-droite $[OM)$ coupe $\mathscr{C}$ en N. On a donc $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{ON}$.
$N \in \mathscr{C}$ donc ses coordonnées cartésiennes sont $(\cos\theta; \sin\theta)$. Celles de M sont donc $(r\cos\theta; r\sin\theta)$.
Par unicité des coordonnées, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.
De plus $OM^2 = x^2 + y^2$ et $OM = r$ donc $r^2 = x^2 + y^2$.