Barycentres

Exercice 1

On considère deux points A et B distincts du plan ou de l'espace.

1/ Montrer, en exprimant $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, qu'il existe un unique point G vérifiant :

$$3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$

On dit que G est le barycentre des points $(A, 3)$ et $(B, 2)$.

2/ Placer le point G sur une figure.

3/ Soit $k \neq 0$. Démontrer que G est aussi barycentre de $(A, 3k)$ et $(B, 2k)$.

4/ Soit M un point quelconque. Exprimer le vecteur $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MG}$.
Retrouver l'égalité de la question 1 en choisissant un point M convenable.

5/ On suppose que A et B sont des points de l'espace muni d'un repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.
Déterminer les coordonnées de G en fonction de celles de A et B.

Exercice 2

On considère deux points A et B du plan ou de l'espace et deux réels a et b.

1/ Déterminer, en s'inspirant de l'exercice précédent, à quelle condition sur a et b il existe un point G vérifiant :

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$

Dans la suite de l'exercice, on suppose cette condition vérifiée. G est appelé barycentre du système de points pondérés $\{(A, a); (B, b)\}$.

$$\text{On note } G = \text{Bar}\,\{(A, a)\,;(B, b)\}.$$

2/ Soit $k \neq 0$. Démontrer que $G = \text{Bar}\,\{(A, ka)\,;(B, kb)\}$

3/ Démontrer que, si A et B sont distincts, $G \in (AB)$.

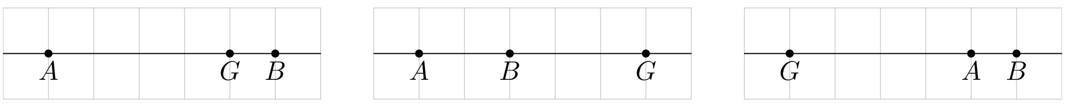
4/ On suppose a et b positifs. Démontrer que $G \in [AB]$.

5/ Soit M un point quelconque. Exprimer $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$.

6/ On se place dans un repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ de l'espace.
Déterminer les coordonnées de G en fonction de celles de A et B.

7/ Placer deux points A et B. Construire les points suivants :
$I = \text{Bar}\,\{(A, 1)\,;(B, 1)\}\,;\ G = \text{Bar}\left\{\left(A, \frac{1}{2}\right);(B, 2)\right\}\,;\ H = \text{Bar}\,\{(A, -3)\,;(B, 1)\}$

8/ Dans chacun des cas suivants, déterminer, en s'aidant du quadrillage, deux réels a et b tels que $G = \text{Bar}\,\{(A, a)\,;(B, b)\}$



Exercice 3

On considère trois points A, B et C du plan ou de l'espace et trois réels a, b et c.

1/ Déterminer à quelle condition sur a, b et c il existe un point G vérifiant :
$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$
Dans la suite de l'exercice, on suppose cette condition vérifiée.
On a alors $G = \text{Bar}\,\{(A,a)\,;(B,b)\,;(C,c)\}$.

2/ Soit $k \neq 0$. Démontrer que $G = \text{Bar}\,\{(A,ka)\,;(B,kb)\,;(C,kc)\}$

3/ Démontrer que, si A, B et C ne sont pas alignés, $G \in (ABC)$.

4/ On suppose que $a + b \neq 0$. On pose $H = \text{Bar}\,\{(A,a)\,;(B,b)\}$.
Démontrer que $G = \text{Bar}\,\{(H,a+b)\,;(C,c)\}$.

5/ Soit M un point quelconque. Exprimer $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$.

6/ On se place dans un repère $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k})$ de l'espace.
Déterminer les coordonnées de G en fonction de celles de A, B et C.

7/ Placer trois points A, B et C. Construire les points suivants :
$G = \text{Bar}\,\{(A,1)\,;(B,1)\,;(C,1)\}$; $H = \text{Bar}\,\{(A,1)\,;(B,2)\,;(C,3)\}$;
$I = \text{Bar}\,\{(A,-1)\,;(B,1)\,;(C,2)\}$

8/ Dans chacun des cas suivants, déterminer, en s'aidant du quadrillage, trois réels a, b et c tels que $G = \text{Bar}\,\{(A,a)\,;(B,b)\,;(C,c)\}$