Chapitre 6

Barycentres

On se place dans le plan ou dans l'espace.

1/ Barycentre de deux points

a) Définition

Théorème et définition

Soient A et B deux points quelconques, α et β deux réels.
Il existe un unique point G du plan tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ si et seulement si $\alpha+\beta\neq 0$.
Ce point est appelé barycentre du système de points pondérés $(A,\alpha);(B,\beta)$. On note $G=\text{Bar}\,\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\}$.

Démonstration

Quels que soient α et β :

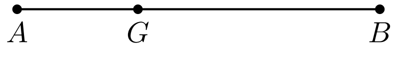
$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}\iff\alpha\overrightarrow{GA}+\beta(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{0}\iff\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$$
$$\iff(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}=-\beta\overrightarrow{AB}\iff(\alpha+\beta)\overrightarrow{AG}=\beta\overrightarrow{AB}$$

1/ Si $\alpha+\beta\neq 0$ alors l'équation équivaut à $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.
Le point G existe et est unique.

2/ Si $\alpha+\beta=0$ alors l'équation équivaut à $\beta\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$.
Cette n'équation n'admet pas de solution si $A\neq B$ et $\beta\neq 0$ et en admet une infinité si $A=B$ ou $\beta=0$.

Exemple : Deux points A et B étant donnés, placer $G=Bar\{(A,2)\,;(B,1)\}$.

$$\begin{aligned}
&G=\text{Bar}\,\{(A,2)\,;(B,1)\}\\
&\iff 2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}\\
&\iff 2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}\\
&\iff 3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}\\
&\iff \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$



b) Propriétés

Dans tout le paragraphe, A et B sont deux points quelconques, α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et $G = \text{Bar}\,\{(A, \alpha)\,;(B, \beta)\}$

Homogénéité

Propriété

Soit k un réel. Si $k \neq 0$ alors $G = \text{Bar}\,\{(A, k\alpha)\,;(B, k\beta)\}$.

Démonstration

Si $k \neq 0$ alors :

$$\begin{aligned} G = \text{Bar}\,\{(A, \alpha)\,;(B, \beta)\} &\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \iff k(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}) = k\,\overrightarrow{0} \\ &\iff k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \iff G = \text{Bar}\,\{(A, k\alpha)\,;(B, k\beta)\} \end{aligned}$$

Exemple : Démontrer que l'on peut exprimer G comme barycentre de A et B de telle façon que la somme des coefficients soit égale à 1.

Si $G = \text{Bar}\,\{(A, \alpha)\,;(B, \beta)\}$ alors $G = \text{Bar}\left\{\left(A, \dfrac{1}{\alpha+\beta}\alpha\right);\left(B, \dfrac{1}{\alpha+\beta}\beta\right)\right\}$ car $\alpha + \beta \neq 0$.

On a ainsi $G = \text{Bar}\left\{\left(A, \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right);\left(B, \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\right\}$ avec $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} = 1$

Position du barycentre

Propriété

Si A et B sont distincts alors $G \in (AB)$. Autrement dit, A, B et G sont alignés.
Si, de plus, α et β sont de même signe alors $G \in [AB]$.

Démonstration

$G = \text{Bar}\,\{(A, \alpha)\,;(B, \beta)\} \iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$

Les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont donc colinéaires et G, A et B sont alignés.

De plus, on a obtenu au cours de la première démonstration le résultat suivant :

$\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

or si α et β sont de même signe alors $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$ est positif et inférieur à 1.

Ainsi $G \in [AB]$.

Propriété

Réciproquement, si $A \neq B$, tout point de la droite (AB) est le barycentre de A et B affectés de coefficients bien choisis.

Démonstration

Si $M \in (AB)$ alors $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} &\iff \overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{AM} - k(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{0} \\ &\iff \overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \iff (k-1)\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

De plus, $k - 1 - k = -1 \neq 0$ donc $M = \text{Bar}\,\{(A, k-1)\,;(B, -k)\}$.

Isobarycentre

Propriété

Si $\alpha = \beta$, alors G est appelé isobarycentre de A et B. G est alors le milieu du segment $[AB]$.

Démonstration immédiate

Réduction vectorielle

Propriété

Quel que soit le point M, $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

Démonstration

Quel que soit le point M,

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} &= \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) = \alpha\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{MG} + \beta\overrightarrow{GB} \\ &= (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG} + \underbrace{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}}_{=\overrightarrow{0}} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}\end{aligned}$$

Exemple : Soit $G = Bar\{(A,2)\,;(B,5)\}$. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

L'égalité précédente pour $M = A$ donne $5\overrightarrow{AB} = 7\overrightarrow{AG}$. On a donc $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$.

c) Coordonnées du barycentre

Propriété

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan. Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

Si $G = \text{Bar}\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\}$ alors $G\left(\dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta}; \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta}\right)$

Dans un repère de l'espace, il suffit de faire le même calcul sur la troisième coordonnée.

Démonstration

Quel que soit le point M, on a $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

Cette égalité est donc valable en particulier pour $M = O$.

On a donc $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{OG}$ soit $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA} + \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$

Les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ sont $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et les coordonnées de $\overrightarrow{OB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$.

On en déduit que les coordonnées de $\overrightarrow{OG}$ sont $\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha+\beta}x_A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}x_B \\ \frac{\alpha}{\alpha+\beta}y_A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta} \\ \frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}$.

Exemple : Dans un repère du plan, on a $A(3; -2)$ et $B(-1; 4)$. Déterminer les coordonnées de G barycentre de $(A,2); (B,3)$.

On a :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{2 \times x_A + 3 \times x_B}{2+3} = \dfrac{2 \times 3 + 3 \times (-1)}{5} = \dfrac{2}{5} \\ y_G = \dfrac{2 \times y_A + 3 \times y_B}{2+3} = \dfrac{2 \times (-2) + 3 \times 4}{5} = \dfrac{8}{5} \end{cases}$$

Ainsi $G\left(\dfrac{2}{5}; \dfrac{8}{5}\right)$

2/ Barycentre de trois points

Les définitions et propriétés du paragraphe précédent s'étendent au cas de trois points pondérés.

a) Définition

Théorème et définition

Soient A, B et C trois points quelconques, α, β et γ trois réels.
Il existe un unique point G du plan tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.
Ce point est appelé barycentre du système de points pondérés $(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)$. On note $G = \text{Bar}\left\{(A, \alpha)\,; (B, \beta)\,; (C, \gamma)\right\}$

Démonstration

Quels que soient α, β et γ :

$$\begin{aligned}
\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} &\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{0} \\
&\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{GA} + \gamma\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0} \\
&\iff (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{GA} = -\beta\overrightarrow{AB} - \gamma\overrightarrow{AC} \\
&\iff (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

1/ Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ alors l'équation équivaut à

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AC}$$

Le point G existe et est unique.

2/ Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$ alors l'équation équivaut à $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$.
Cette n'équation n'admet pas de solution si $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{0}$ et en admet une infinité si $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$.

b) Associativité du barycentre

Propriété

Soient A, B et C trois points, α, β et γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$.

$$\text{Si } \begin{cases} G = \text{Bar}\left\{(A, \alpha)\,; (B, \beta)\,; (C, \gamma)\right\} \\ H = \text{Bar}\left\{(A, \alpha)\,; (B, \beta)\right\} \end{cases} \quad \text{alors} \quad G = \text{Bar}\left\{(H, \alpha + \beta)\,; (C, \gamma)\right\}$$

Démonstration

Supposons que $\begin{cases} G = \text{Bar}\,\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\,;(C,\gamma)\} \\ H = \text{Bar}\,\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\} \end{cases}$

On a alors :

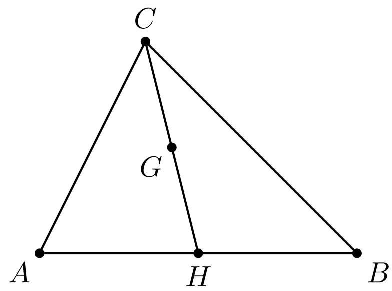
$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\overrightarrow{GH}+\gamma\overrightarrow{GC} &= \alpha\overrightarrow{GH}+\beta\overrightarrow{GH}+\gamma\overrightarrow{GC} = \alpha\overrightarrow{GA}+\alpha\overrightarrow{AH}+\beta\overrightarrow{GB}+\beta\overrightarrow{BH}+\gamma\overrightarrow{GC} \\ &= \underbrace{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}}_{=\overrightarrow{0}}+\underbrace{\alpha\overrightarrow{AH}+\beta\overrightarrow{BH}}_{=\overrightarrow{0}} = \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$G = \text{Bar}\,\{(H,\alpha+\beta)\,;(C,\gamma)\}$$

Exemple : Trois points A, B et C étant donnés, placer $G = Bar\{(A,1)\,;(B,1)\,;(C,2)\}$.

Posons $H = \text{Bar}\,\{(A,1)\,;(B,1)\}$. H est donc le milieu de $[AB]$.
D'après la propriété d'associativité,
$G = \text{Bar}\,\{(H,2)\,;(C,2)\}$.
G est donc le milieu de $[CH]$.



c) Propriétés

Dans tout le paragraphe, A, B et C sont trois points quelconques, α, β et γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et $G = \text{Bar}\,\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\,;(C,\gamma)\}$

Homogénéité

Propriété

Soit k un réel. Si $k \neq 0$ alors $G = \text{Bar}\,\{(A,k\alpha)\,;(B,k\beta)\,;(C,k\gamma)\}$.

Démonstration

Si $k \neq 0$ alors :

$$\begin{aligned} G = \text{Bar}\,\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\,;(C,\gamma)\} &\iff \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \\ &\iff k(\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}) = k\,\overrightarrow{0} \\ &\iff k\alpha\overrightarrow{GA}+k\beta\overrightarrow{GB}+k\gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \\ &\iff G = \text{Bar}\,\{(A,k\alpha)\,;(B,k\beta)\,;(C,k\gamma)\}\end{aligned}$$

Position du barycentre

Propriété

Si A, B et C ne sont pas alignés alors $G \in (ABC)$. Autrement dit, A, B, C et G sont coplanaires.

Démonstration

$G = \text{Bar}\,\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\,;(C,\gamma)\} \iff \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

Les vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont donc coplanaires. Ainsi les points A, B, C et G sont coplanaires.

Propriété

Réciproquement, si A, B et C ne sont pas alignés, alors tout point du plan (ABC) est le barycentre de A, B et C affectés de coefficients bien choisis.

Démonstration

Si $M \in (ABC)$ alors il existe des réels k et k' tel que :

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{MB} + k'\overrightarrow{AM} + k'\overrightarrow{MC}$$

On a alors $(1-k-k')\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} + k'\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$
donc $M = \text{Bar}\{(A, 1-k-k')\,;(B,k)\,;(C,k')\}$.

Isobarycentre

Propriété

Si $\alpha = \beta = \gamma$, alors G est appelé isobarycentre de A, B et C. G est alors le centre de gravité du triangle ABC.

Démonstration

Soient I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[AC]$.
On a alors $I = \text{Bar}\{(B,1)\,;(C,1)\}$ et $J = \text{Bar}\{(A,1)\,;(C,1)\}$.
D'après la propriété d'associativité, on a, d'une part, $G = \text{Bar}\{(I,2)\,;(A,1)\}$ donc $G \in (AI)$ et, d'autre part, $G = \text{Bar}\{(J,2)\,;(B,1)\}$ donc $G \in (BJ)$.
G appartient donc à deux médianes de ABC.
G est le centre de gravité de ABC.

Réduction vectorielle

Propriété

Quel que soit le point M, $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.

Démonstration

Quel que soit le point M,

$$\begin{aligned}
\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} &= \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + \gamma(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \\
&= \alpha\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{MG} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{MG} + \gamma\overrightarrow{GC} \\
&= (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG} + \underbrace{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC}}_{=\overrightarrow{0}} \\
&= (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}
\end{aligned}$$

d) Coordonnées du barycentre

Propriété

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan. Soit $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$.
Si $G = \text{Bar}\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\,;(C,\gamma)\}$ alors $G\left(\dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}; \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$
Dans un repère de l'espace, il suffit de faire le même calcul sur la troisième coordonnée.

La démonstration est identique au cas de deux points.

Exemple : Dans un repère du plan, on a $A(2;-1)$, $B(0;3)$ et $C(-2;0)$. Déterminer les coordonnées de G barycentre de $(A,1);(B,3);(C,-2)$.

On a :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + 3\times x_B - 2\times x_C}{1+3-2} = \dfrac{2+3\times 0 - 2\times(-2)}{2} = 3 \\ y_G = \dfrac{y_A + 3\times y_B - 2\times y_C}{1+3-2} = \dfrac{-1+3\times 3 - 2\times 0}{2} = 4 \end{cases}$$

Ainsi $G(3;4)$

3/ Barycentre d'un nombre quelconque de points

Toutes les définitions et propriétés précédentes se généralisent à n points pondérés.

- Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n points et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n réels.
  Il existe un unique point G tel que $a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $a_1 + a_2 + \cdots a_n \neq 0$.
  Ce point est appelé barycentre des n points pondérés $(A_1, a_1);(A_2, a_2);\ldots;(A_n, a_n)$.
- Règle d'associativité :
  Pour trouver le barycentre G, de n points, lorsque $n \geqslant 3$, on peut remplacer p points, pris parmi les n points, par leur barycentre (s'il existe) affecté de la somme de leurs coefficients.
- Soit $k \neq 0$.
  $G = \mathrm{Bar}(A_1, a_1),(A_2, a_2),\ldots,(A_n, a_n) \iff G = \mathrm{Bar}(A_1, ka_1),(A_2, ka_2),\ldots,(A_n, ka_n)$.
  Autrement dit, on ne change pas le barycentre en changeant les coefficients par des coefficients proportionnels.
- Si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n \neq 0$ alors G est appelé isobarycentre des n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
- Pour tout point M,
  $$a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{MA_n} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\overrightarrow{MG}$$
- Dans un repère, le barycentre de n points pondérés a pour coordonnées la moyenne des coordonnées des n points pondérés par les n coefficients.
  Dans le cas d'un repère du plan, on obtient :
  $$\begin{cases} x_G = \dfrac{a_1x_{A_1} + a_2x_{A_2} + \cdots + a_nx_{A_n}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \\ y_G = \dfrac{a_1y_{A_1} + a_2y_{A_2} + \cdots + a_ny_{A_n}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \end{cases}$$