Devoir surveillé n° 7

Éléments de correction

Exercice 1

1/ Pour tout point M :

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC} &= a(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})+b(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})+c(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}) \\ &= (a+b+c)\overrightarrow{MG}+a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG} \end{aligned}$$

2/ L'égalité précédente pour $M=O$ donne :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{a}{a+b+c}x_A+\dfrac{b}{a+b+c}x_B+\dfrac{c}{a+b+c}x_C=\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c} \\ y_G=\dfrac{a}{a+b+c}y_A+\dfrac{b}{a+b+c}y_B+\dfrac{c}{a+b+c}y_C=\dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c} \end{cases}$$

3/ $G(-1;-6)$.

Exercice 2

1/
- $\overrightarrow{AJ}=-2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ}=-2\overrightarrow{AJ}-2\overrightarrow{JC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{0}$
  Ainsi $J=\text{Bar}\,\{(A;3)\,;(C;-2)\}$
- $\overrightarrow{AK}=-\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK}=-\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{0}$
  Ainsi $K=\text{Bar}\,\{(A;2)\,;(B;-1)\}$
- $\overrightarrow{CG}=-3\overrightarrow{CK} \Leftrightarrow \overrightarrow{CG}=-3\overrightarrow{CG}-3\overrightarrow{GK} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{GC}-3\overrightarrow{GK}=\overrightarrow{0}$
  Ainsi $G=\text{Bar}\,\{(C;4)\,;(K;-3)\}$

2/ $\begin{cases} G=\text{Bar}\,\{(C;4)\,;(K;-3)\} \\ K=\text{Bar}\,\{(A;-6)\,;(B;3)\} \end{cases}$ donc $G=\text{Bar}\,\{(C;4)\,;(A;-6)\,;(B;3)\}$

$\begin{cases} G=\text{Bar}\,\{(C;4)\,;(A;-6)\,;(B;3)\} \\ J=\text{Bar}\,\{(A;-6)\,;(C;4)\} \end{cases}$ donc $G=\text{Bar}\,\{(J;-2)\,;(B;3)\}$

B, G et J sont donc alignés.

Exercice 3

1/ $\begin{cases} G=\text{Bar}\,\{(A;2)\,;(B;-1)\,;(C;2)\,;(D;-1)\} \\ I=\text{Bar}\,\{(A;2)\,;(C;2)\} \\ J=\text{Bar}\,\{(B;-1)\,;(D;-1)\} \end{cases}$ donc $G=\text{Bar}\,\{(I;4)\,;(J;-2)\}=\text{Bar}\,\{(I;2)\,;(J;-1)\}$.

Pour tout M du plan $2\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MJ}=\overrightarrow{MG}$

Pour $M=I$, on obtient $\overrightarrow{IG}=-\overrightarrow{IJ}$.

2/ a) $\left\|2\overrightarrow{AA}-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right\|=\left\|-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right\|$

donc $A\in\mathscr{E}$

b) Pour tout M du plan,

$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MG}$

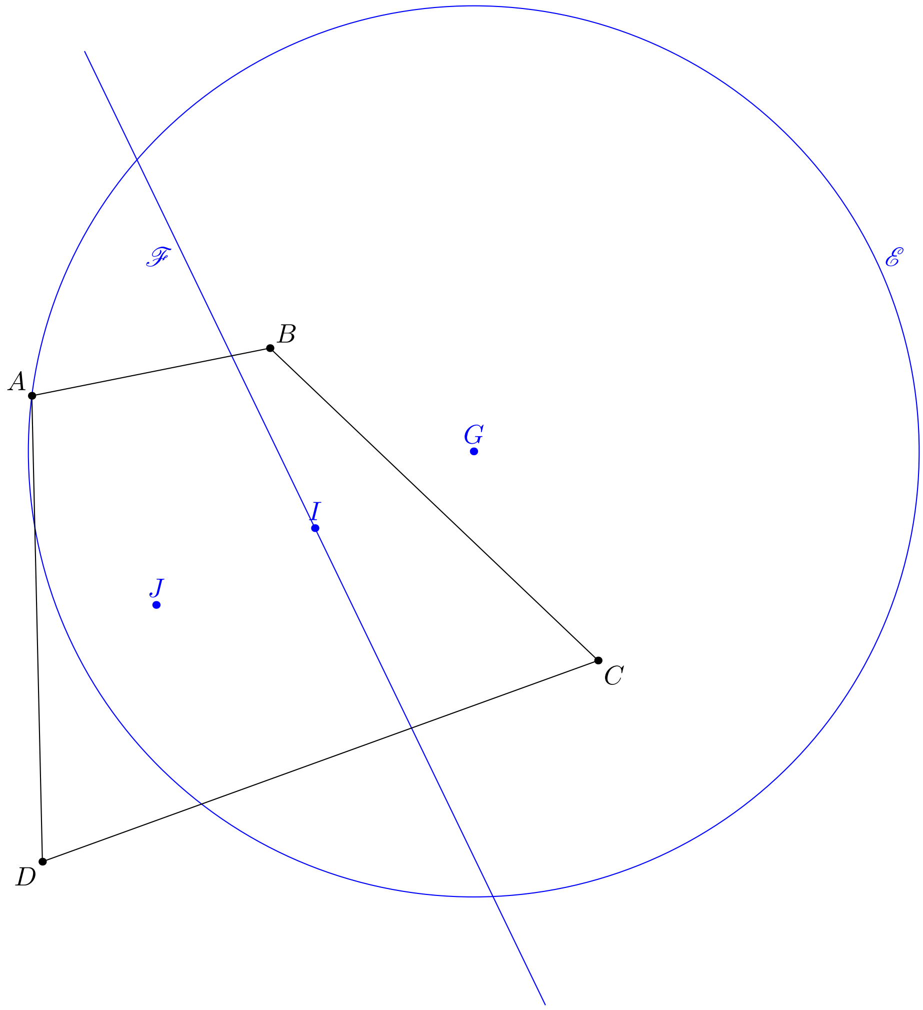
et $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MJ}$ donc $\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{CJ}$

L'équation devient donc : $\left\|2\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|2\overrightarrow{CJ}\right\| \Leftrightarrow GM=CJ$.

L'ensemble $\mathscr{E}$ est donc le cercle de centre G et de rayon CJ (ou le cercle de centre G passant par A).

3/ a) $\left\|2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{ID}\right\|=\left\|-\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{ID}\right\|=\left\|\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}\right\|$
donc $I\in\mathscr{F}$.

b) Pour tout M du plan,
$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MG}$
et $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MJ}$
L'équation devient donc : $\left\|2\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MJ}\right\|\Leftrightarrow GM=JM$.
L'ensemble $\mathscr{F}$ est donc la médiatrice de $[GJ]$.



Exercice 4

1/ G_k existe $\Leftrightarrow (1-k^2)+(1-k^2)+(2k^2-2k)\neq 0\Leftrightarrow 2-2k\neq 0\Leftrightarrow k\neq 1$ donc $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

2/ Pour tout M : $(1-k^2)\overrightarrow{MA}+(1-k^2)\overrightarrow{MB}+(2k^2-2k)\overrightarrow{MC}=(2-2k)\overrightarrow{MG_k}$
donc $(1-k^2)(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})+(2k^2-2k)\overrightarrow{MC}=(2-2k)\overrightarrow{MG_k}$
et $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ car I est le milieu de $[AB]$.
donc $2(1-k^2)\overrightarrow{MI}+(2k^2-2k)\overrightarrow{MC}=(2-2k)\overrightarrow{MG_k}$.
L'égalité précédente pour $M=I$ donne :
$\overrightarrow{IG_k}=\dfrac{2k^2-2k}{2-2k}\overrightarrow{IC}=\dfrac{k(2k-2)}{2-2k}\overrightarrow{IC}=-k\overrightarrow{IC}$

3/ Lorsque k décrit $\mathscr{D}$, G_k décrit la droite (IC) privée du point G tel que $\overrightarrow{IG}=-\overrightarrow{IC}$