Approximation affine

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On appelle C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal et A le point de C_f d'abscisse 1.

1/ a) Tracer la courbe C_f à l'écran de la calculatrice en utilisant la fenêtre : $-1 \leqslant x \leqslant 3$ et $-1 \leqslant y \leqslant 3$.

b) À l'aide du menu ZOOM IN, réaliser cinq zooms successifs de facteur 2 autour du point A.

c) Que peut-on dire de la partie visible de la courbe ?

2/ a) Soit M_1 le point de C_f d'abscisse $1,1$. Déterminer une équation de la droite (AM_1).

b) Reprendre la question précédente avec M_2 d'abscisse $1,01$ puis M_3 d'abscisse $1,001$.

3/ En prenant des points M sur la courbe C_f de plus en plus proche de A, il semble que les droites (AM) obtenues se rapprochent d'une droite T.

a) Proposer une équation de T.

b) Sur le dernier écran obtenu à la question 1b, tracer la droite T. Qu'observe-t-on ?

c) À l'aide du menu ZOOM OUT, réaliser maintenant cinq zooms successifs autour du point A. Qu'observe-t-on ?

d) Par le calcul, étudier l'intersection de C_f et T.

Exercice 2

On reprend les données de l'exercice précédent dans lequel on a conjecturé que lorsqu'un point M se rapproche de A sur C_f, la droite (AM) se rapproche d'une droite T. On se propose de démontrer cette conjecture.
Pour tout réel h non nul, on note M le point de C_f d'abscisse $1 + h$.

1/ Faire un schéma.

2/ Exprimer le coefficient directeur de la droite (AM) en fonction de h.

3/ Lorsque M se rapproche du point A, h « tend » vers une valeur. Laquelle ? Le coefficient directeur précédent tend alors vers un réel m. Lequel ?

4/ Déterminer l'équation réduite de la droite T de coefficient directeur m qui passe par le point A.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent dans le cas plus général où A a pour abscisse a.