Chapitre 3

Dérivation des fonctions

1/ Généralités

a) Limite en 0

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant 0 et $L \in \mathbb{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers 0 si on peut rendre $f(x)$ aussi proche de L que l'on veut pour x suffisamment proche de zéro. On note : $\lim\limits_{x \to 0} hf(x) = L$

Exemple : $\lim\limits_{x \to 0} xx^2 = 0 \qquad \lim\limits_{x \to 0} xx + 1 = 1 \qquad \lim\limits_{x \to 0} x\sqrt{x} + x - 2 = -2\ldots$

Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{x^2 - 2x}{3x}$.

Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{x^2 - 2x}{3x} = \dfrac{x - 2}{3}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} x\dfrac{x^2 - 2x}{3x} = -\dfrac{2}{3}$.

b) Nombre dérivé

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$.
On appelle taux de variation de f entre a et h le réel $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
On dit que f est dérivable en a si, lorsque h tend vers 0, le taux de variation de f entre a et h tend vers un réel L autrement dit si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = L$.
Ce réel L est appelé nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.

Exemple : Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto x^2$ *est dérivable en 2 et calculer* $f'(2)$.
Démontrer que la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ *n'est pas dérivable en 0.*

Pour tout $h \neq 0$, $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{(2+h)^2 - 4}{h} = \dfrac{h^2 + 4h}{h} = h + 4$

Ainsi $\lim\limits_{x \to 0} h\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = 4$.

f est donc dérivable en 2 et $f'(2) = 4$.

Pour tout $h \neq 0$, $\dfrac{g(0+h) - g(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$.

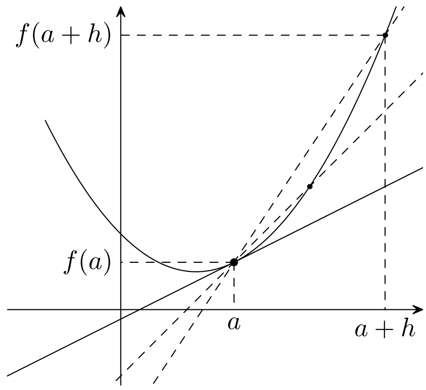
Or, $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ n'a pas de limite finie lorsque h tend vers 0 donc g n'est pas dérivable en 0.

c) Interprétation graphique

Propriété

Soit f une fonction définie sur I et C_f sa représentation graphique dans un repère. Soit $a \in I$.
Si f est dérivable en a alors $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point $A(a; f(a))$. L'équation de cette tangente est alors : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Illustration : Soit $A(a; f(a)) \in C_f$.
Soit $h \neq 0$ et $M(a+h; f(a+h)) \in C_f$.
Le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ représente le coefficient directeur de la droite (AM). Lorsque h tend vers 0, M se rapproche de A et la droite (AM) tend à se confondre avec la tangente à C_f en A.



Démonstration
Soit T la tangente à la courbe au point A. Son coefficient directeur est $f'(a)$ donc l'équation réduite de T est de la forme $y = f'(a)x + b$.
$A \in T$ donc $f(a) = f'(a)a + b$ donc $b = f(a) - af'(a)$.
L'équation de T est donc $y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$ soit $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

d) Approximation affine

Propriété

Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $a \in I$.
– Il existe une fonction φ telle que pour tout réel h avec $a + h \in I$:
$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} h\varphi(h) = 0$$
– La fonction $h \longmapsto f(a) + hf'(a)$ est une approximation affine de f pour h proche de 0.

Démonstration
Pour $h \neq 0$, on pose $\varphi(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$.
f est dérivable en a donc lorsque h tend vers 0, $\varphi(h)$ tend vers $f'(a) - f'(a) = 0$.
De plus, $h\varphi(h) = f(a+h) - f(a) + hf'(a)$ soit $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h)$

2/ Calculs de dérivées

a) Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction défine sur un intervalle I.
– Si, pour tout x de I, f est dérivable en x, on dit que f est dérivable sur I.
– La fonction définie sur I par $x \longmapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f. Cette fonction est notée f'.

b) Dérivées usuelles

Fonctions constantes

Propriété

Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = k$
alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $f'(x) = 0$.

Démonstration

Pour tout réel a et $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0$$

f est donc dérivable en a et $f'(a) = 0$.

Fonctions affines

Propriété

Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = mx + p$
alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $f'(x) = m$.

Démonstration

Pour tout réel a et $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{m(a+h) + p - ma - p}{h} = \frac{mh}{h} = m$$

f est donc dérivable en a et $f'(a) = m$

Fonction carré

Propriété

Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$
alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $f'(x) = 2x$.

Démonstration

Pour tout réel a et $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$$

De plus, $2a + h$ tend vers $2a$ lorsque h tend vers 0. f est donc dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

Fonctions puissances

Propriété

Soit n un entier tel que $n \geqslant 1$.
Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^n$
alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $f'(x) = nx^{n-1}$.

Résultat admis.

Fonction inverse

Propriété

Si f est la fonction définie sur $]-\infty;0[\,\cup\,]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x}$

alors f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x\neq 0$: $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

Démonstration

Pour tout réel $a\neq 0$ et $h\neq 0$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h}=\frac{a-(a+h)}{ha(a+h)}=\frac{-1}{a(a+h)}$$

Or $\dfrac{-1}{a(a+h)}$ tend vers $-\dfrac{1}{a^2}$ lorsque h tend vers 0.

f est donc dérivable en a et $f'(a)=-\dfrac{1}{a^2}$

Fonction racine carrée

Propriété

Si f est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x}$

alors f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout réel $x>0$: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Démonstration

Pour tout réel $a>0$ et $h\neq 0$ tel que $a+h>0$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}=\frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$$

$$=\frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}=\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

Or, lorsque h tend vers 0, $\dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$ tend vers $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

f est donc dérivable en a et $f'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

Fonctions trigonométriques

Propriété

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$\sin'(x)=\cos(x)\qquad \text{et} \qquad \cos'(x)=-\sin(x)$$

Résultat admis.

c) Opérations sur les fonctions et dérivées

u et v désignent deux fonctions dérivables sur un intervalle I et λ un réel.

Propriété

La fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)'=u'+v'$.

La fonction λu est dérivable sur I et $(\lambda u)'=\lambda u'$.

Démonstration

Pour tout $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$:

$$\begin{aligned}\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} &= \frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}\end{aligned}$$

dont la limite est $u'(a)+v'(a)$ lorsque h tend vers 0.

$$\frac{(\lambda u)(a+h)-(\lambda u)(a)}{h} = \frac{\lambda u(a+h)-\lambda u(a)}{h} = \lambda\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$$

dont la limite est $\lambda u'(a)$ lorsque h tend vers 0.

Exemple : Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ *par* $f(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{3x} - 5\sqrt{x} + 2$

f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ car elle est la somme de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ et, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = 3\times 2x + \dfrac{1}{3}\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) - 5\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ainsi :

$$f'(x) = 6x - \frac{1}{3x^2} - \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

Propriété

La fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
La fonction u^2 est dérivable sur I et $(u^2)' = 2uu'$.

Démonstration

Pour tout $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$:

$$\begin{aligned}\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} &= \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)-u(a)v(a)}{h} \\ &= \underbrace{\frac{u(a+h)-u(a)}{h}}_{\text{tend vers } u'(a)} \times v(a+h) + \underbrace{\frac{v(a+h)-v(a)}{h}}_{\text{tend vers } v'(a)} \times u(a)\end{aligned}$$

dont la limite est $u'(a)v(a) + v'(a)u(a)$ lorsque h tend vers 0.
Ainsi uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.

Exemple : Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = (x^2+1)(x^5+2)$

$f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x^2+1$ et $v(x) = x^5+2$.
f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 2x(x^5+2) + 5x^4(x^2+1)$$

Propriété

Si v ne s'annule pas sur I

La fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

La fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Démonstration

Pour tout $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$:

$$\frac{\dfrac{1}{v(a+h)} - \dfrac{1}{v(a)}}{h} = \frac{v(a)-v(a+h)}{hv(a+h)v(a)} = -\frac{v(a+h)-v(a)}{h} \times \frac{1}{v(a)v(a+h)}$$

dont la limite est $-v'(a) \times \dfrac{1}{(v(a))^2}$ lorsque h tend vers 0.

Ainsi $\dfrac{1}{v}$ est dérivable et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

De plus

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \times \frac{1}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exemple : Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $]2\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3}{2x-4}$ et de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{3x+5}{2x^2+1}$

Pour tout $x \in]2\ ;\ +\infty[$, $f(x) = \lambda \times \dfrac{1}{u(x)}$ avec $\lambda = 3$ et $u(x) = 2x - 4$.

f est donc dérivable sur $]2\ ;\ +\infty[$ et $f(x) = 3 \times \left(-\dfrac{2}{(2x-4)^2}\right) = \dfrac{-6}{(2x-4)^2}$.

Pour tout réel x , $g(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 3x + 5$ et $v(x) = 2x^2 + 1$.

g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g(x) = \frac{3(2x^2+1) - 4x(3x+5)}{(2x^2+1)^2} = \frac{-6x^2 - 20x + 3}{(2x^2+1)^2}$$

Propriété

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle J et u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout x de I, $u(x) \in J$.
La fonction $f \circ u$ est dérivable et, pour tout réel x de I :

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$$

Exemple : Calculer la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Pour tout réel x, $g(x) = f \circ u(x)$ avec $u(x) = 2x + \dfrac{\pi}{3}$ et $f(x) = \cos(x)$.

g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

3/ Applications de la dérivation

a) Dérivée et variations

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
– f est croissante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$.
– f est constante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) = 0$.
– f est décroissante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$.

Propriété admise.
Remarques : On utilise souvent les résultats suivants.
– Si, pour tout x de I, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
– Si, pour tout x de I, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.

Exemple : Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x$.

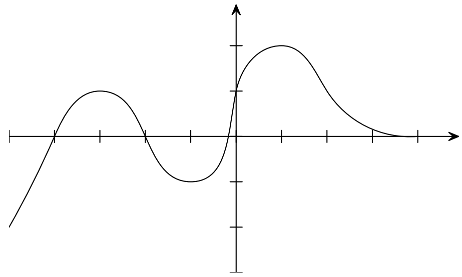
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Extremum local

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.
On dit que $f(x_0)$ est un maximum local (respectivement minimum local) de f si l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \leqslant f(x_0)$ (respectivement $f(x) \geqslant f(x_0)$).

Exemple : Une fonction est représentée ci-contre.
Son minimum est -2
Son maximum est 2.
-1 *et* -2 *sont des minimums locaux*
1 et 2 sont des maximums locaux.



Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$.
Si $f(x_0)$ est un extremum local de f alors $f'(x_0) = 0$.

Remarque : La réciproque de cette propriété est fausse.

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$.
Si f' s'annule en changeant de signe en x_0 alors $f(x_0)$ est un extremum local de f.