Opérations sur les fonctions

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1/ Afficher à l'écran de la calculatrice le graphe de f ainsi que les graphes des fonctions $x \mapsto x^2 + 3$, $x \mapsto x^2 - 7$ et $x \mapsto x^2 + 1$. Que remarque-t-on ?

2/ Afficher à l'écran de la calculatrice le graphe de f ainsi que les graphes des fonctions $x \mapsto 3x^2$, $x \mapsto -2x^2$ et $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$. Que remarque-t-on ?

3/ Afficher à l'écran de la calculatrice le graphe de f ainsi que les graphes des fonctions $x \mapsto (x+5)^2$, $x \mapsto (x-4)^2$ et $x \mapsto (x+2)^2$. Que remarque-t-on ?

Dans toute la suite de l'activité, le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

Exercice 2

Soit a et b deux réels tels que $a < b$, f une fonction définie sur $[a; b]$, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et λ un réel.

1/ Soit $g = f + \lambda$, c'est-à-dire $g : x \mapsto f(x) + \lambda$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative.

a) Déterminer l'ensemble de définition de g.

b) Pour tout x de $[a; b]$, on note M et N les points de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x.
Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$.

c) Comment obtenir $\mathscr{C}_g$ à partir de $\mathscr{C}_f$?

2/ Soit $h = \lambda f$, c'est-à-dire $h : x \mapsto \lambda f(x)$ et $\mathscr{C}_h$ sa courbe représentative.

a) Déterminer l'ensemble de définition de h.

b) Pour tout x de $[a; b]$, on note M et P les points de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$ d'abscisse x.
Exprimer y_P en fonction de y_M.

c) Comment obtenir $\mathscr{C}_h$ à partir de $\mathscr{C}_f$?

d) Que peut-on dire dans le cas où $\lambda = -1$?

3/ Soit $k : x \mapsto f(x + \lambda)$ et $\mathscr{C}_k$ sa courbe représentative.

a) Déterminer l'ensemble de définition de k.

b) Pour tout x de $[a; b]$, on note M le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et Q le point d'abscisse $(x - \lambda)$ de $\mathscr{C}_k$.
Exprimer $\overrightarrow{MQ}$ en fonction de $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$.

c) Comment obtenir $\mathscr{C}_k$ à partir de $\mathscr{C}_f$?

Exercice 3

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = -x^2 + 8x - 7$ et $\mathscr{C}_\varphi$ sa représentation graphique.

1/ Développer, réduire et ordonner $9 - (x - 4)^2$.

2/ Montrer que $\mathscr{C}_\varphi$ est une parabole en explicitant les transformations successives qui permettent d'obtenir $\mathscr{C}_\varphi$ à partir de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$.

3/ En déduire les variations de φ.

Exercice 4

On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction u.

1/ Quel est l'ensemble de définition de u ?

2/ Donner le tableau de variations de u.

3/ Discuter du nombre de solutions de l'équation $u(x) = m$ suivant les valeurs de m.

4/ Déterminer l'expression de $u(x)$ en fonction de x.

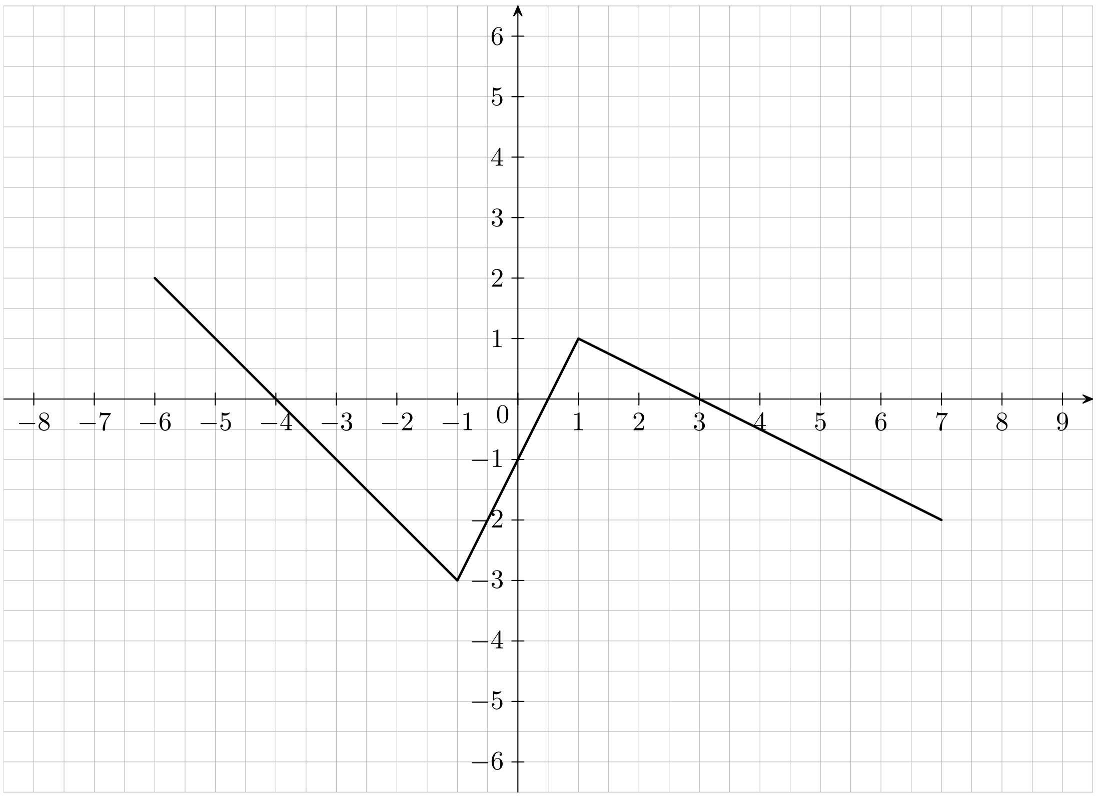
5/ Construire la courbe de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto u(x-2)$;

b) $g : x \mapsto u(x) + 3$;

c) $h : x \mapsto 2u(x)$;

d) $k : x \mapsto |u(x)|$.



Exercice 5

On considère deux fonctions u et v. On *définit* les fonctions $u+v$ et uv par : $(u+v)(x) = u(x) + v(x)$ et $(uv)(x) = u(x)v(x)$.

1/ Que doivent vérifier les ensembles de définition de u et v pour pouvoir définir $u+v$?

2/ Démontrer que pour tout réel λ, $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.

3/ Démontrer que pour toute fonction w, $w(u+v) = wu + wv$.

4/ Sur le graphique précédent, représenter la fonction v définie sur $[-6; 7]$ par $v(x) = x$ puis la fonction $w_1 = u + v$.

5/ Avec la fonction u de l'exercice précédent et la fonction v ci-dessus, expliciter $w_2 = uv$ puis tracer sa représentation graphique.