Chapitre 4

Limites

1/ Limites d'une fonction en l'infini

a) Limite réelle en l'infini, asymptote horizontale

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A\ ;\ +\infty[$. On dit que f tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.
On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

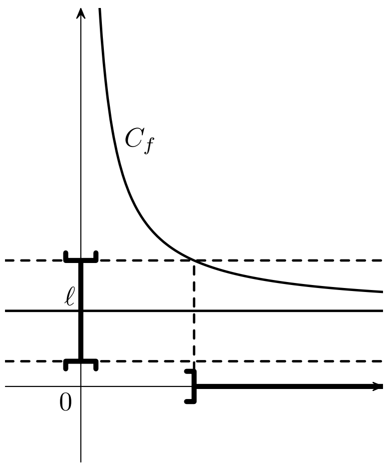
Remarque : on peut définir de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) \in]1-a\ ;\ 1+a[&\Leftrightarrow 1-a < 1+\frac{1}{x} < 1+a \\ &\Leftrightarrow -a < \frac{1}{x} < a \\ &\Leftrightarrow x > \frac{1}{a} \quad \text{car } x \text{ est positif.} \end{aligned}$$

Ainsi pour $x > \frac{1}{a}$, $f(x) \in]1-a\ ;\ 1+a[$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.



Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A\ ;\ +\infty[$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ou si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

Limites usuelles

Propriété

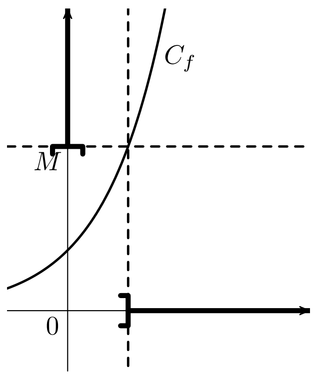
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\,;\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0\,;\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0\,;\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0\,;\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$

b) Limite infinie en l'infini

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A\ ;\ +\infty[$. On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]M\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.
On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque : on peut définir de même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$...



Exemple : Soit f la fonction définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 3$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Soit $M \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) > M &\Leftrightarrow x^2 + 3 > M \Leftrightarrow x^2 > M - 3 \\ &\Leftrightarrow x > \sqrt{M-3} \quad \text{pour } M > 3. \end{aligned}$$

Ainsi pour $x > \sqrt{M-3}$, $f(x) > M$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Limites usuelles

Propriété

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\,;\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty\,;\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty\,;\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty\,;\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty.$

2/ Limite d'une fonction en un point

a) Limite réelle en un point

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f tend vers L lorsque x tend vers a si tout intervalle ouvert contenant L contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.
On note $\lim\limits_{x\to x} af(x) = L$.

Remarque : $\lim\limits_{x\to x} af(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to h} 0f(a+h) = L$

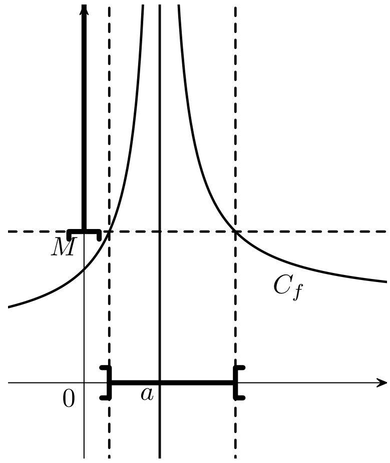
Exemple : $\lim\limits_{x\to0} xx = 0\,;$ $\quad\lim\limits_{x\to0} xx^2 = 0\,;$ $\quad\lim\limits_{x\to0} x\dfrac{(1+x)^2-1}{x} = 2.$

b) Limite infinie en un point, asymptote verticale

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si tout intervalle de la forme $]M\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.
On note $\lim\limits_{x\to x} af(x) = +\infty$.

Remarque : On peut définir de même $\lim\limits_{x\to x} af(x) = -\infty$.



Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} xf(x) = +\infty$.

Soit $M \in \mathbb{R}$

$$f(x) > M \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > M \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{M}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{M}} < x < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Ainsi pour $-\dfrac{1}{\sqrt{M}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{M}}$, $f(x) > M$ donc $\lim\limits_{x\to 0} xf(x) = +\infty$.

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
Si $\lim\limits_{x\to x} af(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to x} af(x) = -\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

Limites usuelles

Propriété

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

3/ Asymptotes obliques

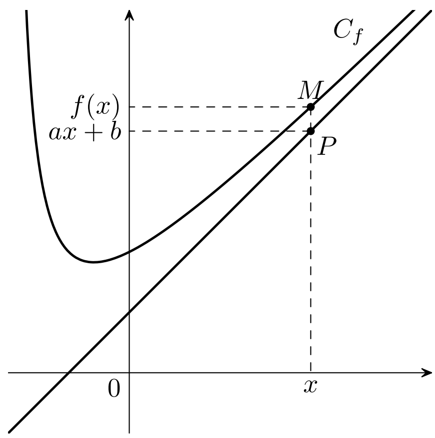
Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A\ ;\ +\infty[$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$), on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

Interprétation graphique :
Le point M a pour coordonnées $(x; f(x))$ et le point N a pour coordonnées $(x; ax+b)$.
La distance MN est donc égale à

$$|f(x) - (ax+b)|$$

Ainsi, si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$ alors la longueur MN tend vers 0.
La courbe « se rapproche » de la droite et tend à « suivre la direction » de la droite.



Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{x^2}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Soit d la droite d'équation $y = 2x - 1$.
Démontrer que d est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

Pour tout $x \neq 0$, $f(x) - (2x - 1) = \dfrac{1}{x^2}$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.
Ainsi, d est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

4/ Opérations sur les limites

Dans les tableaux suivants, a désigne un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

a) Somme de fonctions

Si $\lim\limits_{x\to x} af(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x\to x} ag(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to x} af(x) + g(x) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	? ? ?	$-\infty$

Remarque : ? ? ? signifie que l'on ne peut pas conclure. Cela ne signifie pas que la limite n'existe pas mais simplement qu'on ne peut pas la trouver directement. On parle de « forme indéterminée ».

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + \dfrac{1}{x}$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + \frac{1}{x} = +\infty$$

b) Produit par une constante

k désigne un nombre réel différent de 0.

Si $\lim\limits_{x\to x} af(x) =$	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
et		$k > 0$	$k < 0$	$k > 0$	$k < 0$
alors $\lim\limits_{x\to x} akf(x) =$	$k\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

c) Produit de fonctions

Si $\lim\limits_{x\to x} af(x) =$	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x\to x} ag(x) =$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to x} af(x) \times g(x) =$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$	? ? ?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Remarque : $\pm\infty$ signifie $+\infty$ ou $-\infty$. Dans le cas de la troisième ligne, c'est la règle des signes d'un produit qui permet de conclure.

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)(x^2 + 2)$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} - 1 = -1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 2 = +\infty \end{cases} \quad \text{donc } \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right)(x^2 + 2) = -\infty$$

d) Quotient de fonctions

Si $\lim\limits_{x\to x} af(x) =$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
et $\lim\limits_{x\to x} ag(x) =$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	ℓ'	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{x\to x} a\dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	? ? ?	$\pm\infty$	? ? ?

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{x\to x} 1\dfrac{-3x+2}{(x-1)^2}$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x} 1-3x+2 = -1 \\ \lim\limits_{x\to x} 1(x-1)^2 = 0^+ \end{cases} \quad \text{donc } \lim\limits_{x\to x} 1\frac{-3x+2}{(x-1)^2} = -\infty$$

e) Exemple d'étude d'une forme indéterminée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 5$.
Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -3x+5 = +\infty \end{cases} \quad \text{donc } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x^2\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^2}\right)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x^2} = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} = 1$$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.