Devoir surveillé n° 5

Durée : 2 heures

Exercice 1 (9 points)

Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 + 5x - 2}{x^2 - 1}$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1/ Démontrer que le point $I(0, 2)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

2/ a) Déterminer les limites de f en 1 puis en $+\infty$.

b) Déduire des questions précédentes les limites de f en -1 et $-\infty$.

c) Déduire des questions précédentes les équations des éventuelles asymptotes à $\mathscr{C}_f$ parallèles aux axes de coordonnées.

3/ a) Démontrer que la droite $\mathscr{D} : y = 3x + 2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$.

b) Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$.

4/ a) Justifier que f est dérivable sur D_f puis montrer que, pour tout $x \in D_f$:

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 14x^2 - 5}{(x^2 - 1)^2}$$

b) Factoriser le numérateur de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

5/ Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

6/ Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$ ainsi que les éléments importants de l'étude précédente.

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x\sqrt{x} - 6x$$

1/ Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2/ a) Calculer $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}$.

b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier.

3/ Justifier que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ puis calculer $f'(x)$ sur cet intervalle.

4/ Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 3 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $D = \left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ par :

$$f(x) = \sqrt{2x + 1} - \sqrt{2x - 1}$$

1/ Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2/ a) Montrer que, pour tout $x \in D$, $f(x) > 0$.

b) Étudier les variations de f sur D.

Exercice 4 (3 points)

$ABCD$ est un tétraèdre. On considère les points M, N, P et Q définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}; \qquad \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}; \qquad \overrightarrow{CP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}; \qquad \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

1/ Faire une figure.

2/ a) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b) Déterminer deux réels x et y tels que :

$$\overrightarrow{MQ} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MP}$$

c) Que peut-on en déduire pour M, N, P et Q ?