Devoir surveillé n^o 5

Éléments de correction

Exercice 1

1/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ par $g(x) = f(x) - 2$. Un calcul donne

$$g(x) = \frac{3x^3 + 5x}{x^2 - 1}$$

On démontre facilement que g est impaire puis comme $\mathscr{C}_f$ est l'image de $\mathscr{C}_g$ par la translation de vecteur $2\overrightarrow{\jmath}$, on déduit que le point I est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

2/ a) On calcule la limite en $+\infty$ en factorisant numérateur et dénominateur par leur terme de plus haut degré puis en simplifiant. On obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Les limites en 1 se calculent en appliquant les règles de calcul sur les limites de quotient et en n'oubliant pas de distinguer les cas $x > 1$ et $x < 1$. On obtient $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 1} f(x) = -\infty$

b) Par symétrie, on obtient immédiatemment : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} -1} f(x) = -\infty$.

c) f admet une limite infinie en -1 et 1 donc les droites d'équations $x = 1$ et $x = -1$ sont asymptotes à $\mathscr{C}_f$.

3/ a) Il faut étudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de $f(x) - (3x + 2)$.
Après calculs, on obtient : $\forall x \in D_f, f(x) - (3x + 2) = \frac{8x}{x^2 - 1}$
En factorisant numérateur et dénominateur par leur terme de plus haut degré puis en simplifiant, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (3x + 2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (3x + 2) = 0$.
La droite d'équation $y = 3x + 2$ est donc asymptote à $\mathscr{C}_f$.

b) Les positions relatives sont données par le signe de $f(x) - (3x + 2)$. On obtient :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Signe de $9x$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $x^2 - 1$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $f(x) - (3x+2)$		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	
Positions		$\mathscr{C}_f$ est en dessous de d	||	$\mathscr{C}_f$ est au dessus de d	|	$\mathscr{C}_f$ est en dessous de d	||	$\mathscr{C}_f$ est au dessus de d	

4/ a) f est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Après calculs, on obtient :

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 14x^2 - 5}{(x^2 - 1)^2}$$

b) Aucun théorème du cours ne permet de déterminer le signe d'un polynôme de degré 4. Il faut donc chercher à factoriser le numérateur de $f'(x)$.
Posons $h(x) = 3x^2 - 14x - 5$. h est un polynôme de degré 2 que l'on sait factoriser (après calcul du discriminant, des racines...). On obtient : $h(x) = (3x+1)(x-5)$.
Or $3x^4 - 14x^2 - 5 = h(x^2)$ donc $3x^4 - 14x^2 - 5 = (3x^2+1)(x^2-5)$.

c) $3x^2 + 1 > 0$ donc le numérateur de $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 5$ que l'on peut déterminer simplement car c'est un polynôme de degré 2.
On obtient alors :

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		-1		1		$\sqrt{5}$		$+\infty$
Signe de x^2-5		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $(x^2-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗	$-5\sqrt{5}+2$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$5\sqrt{5}+2$	↗	$+\infty$

5/ L'application de la formule donne : $y = -5x + 2$

Exercice 2

1/ Pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $f(x) = 2x(\sqrt{x} - 3)$. La limite de chacun des facteurs en $+\infty$ est $+\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2/ a) Pour tout $h > 0$, $\dfrac{f(h)}{h} = \dfrac{2h\sqrt{h} - 6h}{h} = 2\sqrt{h} - 6$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{h} = -6$

b) Pour tout $h > 0$, $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{f(h)}{h}$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = -6$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -6$

3/ f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ car elle est le produit et la somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
$\forall x \in\ ]0\ ;\ +\infty[$:

$$f'(x) = 2\sqrt{x} + 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 6 = 2\sqrt{x} + \sqrt{x} - 6 = 3\sqrt{x} - 6$$

4/ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} - 6 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} - 6 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow x > 4$
On en déduit le tableau suivant :

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	↘	-8	↗	$+\infty$

Exercice 3 (3 points)

1/ Pour tout $x \in D$:

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}\right)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}\right)}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}} = \frac{(2x+1)-(2x-1)}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}$$

La limite du dénominateur en $+\infty$ est $+\infty$ (par somme) donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2/ a) Pour tout $x \in D$, $2x+1 > 2x-1$ donc $\sqrt{2x+1} > \sqrt{2x-1}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
On en déduit : $\forall x \in D,\ f(x) > 0$.

b) f est dérivable sur $I = \left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ et, pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} - \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x+1}\sqrt{2x-1}}$$
$$= \frac{-f(x)}{\sqrt{2x+1}\sqrt{2x-1}}$$

$f'(x)$ est donc du signe de $-f(x)$ donc strictement négatif sur I. On obtient :

x	$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	
f	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0

Exercice 4 (3 points)

$ABCD$ est un tétraèdre. On considère les points M, N, P et Q définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}; \qquad \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}; \qquad \overrightarrow{CP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}; \qquad \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

1/

2/ a)
- $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AQ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

b)

$$\overrightarrow{MQ} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MP} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}x\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}x\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}y\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}y\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}y\overrightarrow{AD}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(x+y-1)\overrightarrow{AB} + \left(-\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}y\right)\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(1+y)\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$$

Les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires ainsi :

$$\overrightarrow{MQ} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MP} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}y = 0 \\ 1 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Conclusion : $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP}$

c) Les vecteurs $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont coplanaires donc les points M, N, P et Q sont coplanaires.