Devoir surveillé n° 4

Éléments de correction

Exercice 1

1/ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^2}=0\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}=+\infty\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=-\infty}$

2/ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x-2}-1=-1\\ \lim\limits_{x\to +\infty}x+\sqrt{x}=+\infty\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty}g(x)=-\infty}$

3/ $\forall x\in D_h$:

$$h(x)=\frac{x+2}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x^2-4}=\frac{x+1}{x^2-4}$$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2}x-1=1\\ \lim\limits_{x\overset{>}{\to}2}x^2-4=0^+\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2}h(x)=+\infty}$

4/ $\forall x\geqslant 0$:

$$k(x)=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}=\frac{x-(x+2)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}=\frac{-2}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}$$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}+\sqrt{x+2}=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty}k(x)=0}$

5/ $\forall x\in D_m$:

$$m(x)=\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x+3-4}=\sqrt{x+3}+2$$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}m(x)=4}$

Exercice 2

1/ • En $+\infty$ et $-\infty$

On factorise : $\forall x\in\mathscr{D}_f\setminus\{0\}$, $f(x)=\dfrac{x\left(1-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)}{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}$

On en déduit, après calculs : $\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=-\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=+\infty}$

• En -1 et 3

On étudie le signe de x^2-2x-3, on obtient :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a ainsi $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}-1} x^3-5x^2+2x+7=-1\\ \displaystyle\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}-1} x^2-2x-3=0^+\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}-1} f(x)=-\infty.}$

De même, on obtient $\boxed{\displaystyle\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1} f(x)=+\infty}$; $\boxed{\displaystyle\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}3} f(x)=+\infty}$ et $\boxed{\displaystyle\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}3} f(x)=-\infty}$

Les droites d'équations $x=-1$ et $x=3$ sont donc asymptotes à $\mathscr{C}_f$

2/ Posons $d(x)=f(x)-(x-3)$.

$\forall x\in\mathscr{D}_f$, $d(x)=\ldots=\dfrac{-x-2}{x^2-2x-3}$

$\forall x\in\mathscr{D}_f\setminus\{0\}$, $d(x)=\dfrac{-1-\frac{2}{x}}{x\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} d(x)=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} d(x)=0$.

$\boxed{\text{La droite } d \text{ est asymptote à } \mathscr{C}_f \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty.}$

3/ L'étude du signe de $d(x)$ donne :

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$d(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	
Positions		$\mathscr{C}_f$ est au dessus de d		$\mathscr{C}_f$ est en dessous de d	‖	$\mathscr{C}_f$ est au dessus de d	‖	$\mathscr{C}_f$ est en dessous de d	

Exercice 3

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=f(x+2)-1$.
$\mathscr{C}_g$ est donc l'image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $-2\overrightarrow{\imath}-\overrightarrow{\jmath}$, autrement dit, $\mathscr{C}_f$ est l'image de $\mathscr{C}_g$ par la translation de vecteur $2\overrightarrow{\imath}+\overrightarrow{\jmath}$.
$\forall x\in\mathbb{R}$:

$$g(x)=\frac{(x+2)^2-3(x+2)+3}{(x+2)^2-4(x+2)+5}-1=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}-1=\frac{x}{x^2+1}$$

$\forall x\in\mathbb{R}$:

$$g(-x)=\frac{-x}{(-x)^2+1}=\frac{-x}{x^2+1}=-\frac{x}{x^2+1}=-g(x)$$

La fonction g est donc impaire. Le point O est donc centre de symétrie de $\mathscr{C}_g$.

Par translation, $\boxed{\text{le point } I(2;1) \text{ est centre de symétrie de } \mathscr{C}_f.}$

Devoir surveillé n° 4

Éléments de correction

Exercice 1

1/ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 - x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{\frac{1}{x} - 2} = -2\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

2/ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1}{\sqrt{x}} = -\infty\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

3/ $\forall x \in D_h$:

$$h(x) = \frac{1}{x^2-1} - \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{-x}{x^2-1}$$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} -x = -1 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} x^2 - 1 = 0^+\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} h(x) = -\infty}$

4/ $\forall x \in D_k$:

$$k(x) = \frac{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)} = \frac{x+7-9}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+7}+3}$$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to 2} k(x) = \dfrac{1}{6}}$

5/ $\forall x \geqslant 3$:

$$m(x) = \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}} = \frac{x+1-(x-3)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}} = \frac{4}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}+\sqrt{x-3} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} m(x) = 0}$

Exercice 2

1/ • En $+\infty$ et $-\infty$

On factorise : $\forall x \in \mathscr{D}_f \setminus \{0\}$, $f(x) = \dfrac{x\left(2+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}$

On en déduit, après calculs : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

• En -3 et 1

On étudie le signe de x^2+2x-3, on obtient :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a ainsi $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} -3} 2x^3+5x^2-x-1=-7 \\ \lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} -3} x^2+2x-3=0^+\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} -3} f(x)=-\infty.}$

De même, on obtient $\boxed{\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -3} f(x)=+\infty}$; $\boxed{\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 1} f(x)=-\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 1} f(x)=+\infty}$

Les droites d'équations $x=-3$ et $x=1$ sont donc asymptotes à $\mathscr{C}_f$

2/ Posons $d(x)=f(x)-(2x+1)$.

$\forall x \in \mathscr{D}_f$, $d(x)=\ldots=\dfrac{3x+2}{x^2+2x-3}$

$\forall x \in \mathscr{D}_f \setminus \{0\}$, $d(x)=\dfrac{3+\frac{2}{x}}{x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} d(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} d(x)=0$.

$\boxed{\text{La droite } d \text{ est asymptote à } \mathscr{C}_f \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty.}$

3/ L'étude du signe de $d(x)$ donne :

x	$-\infty$	-3	$-\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$d(x)$	$-$	‖ $+$	0	$-$ ‖	$+$
Positions	$\mathscr{C}_f$ est en dessous de d	$\mathscr{C}_f$ est au dessus de d		$\mathscr{C}_f$ est en dessous de d	$\mathscr{C}_f$ est au dessus de d

Exercice 3

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=f(x+1)-2$.
$\mathscr{C}_g$ est donc l'image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $-\overrightarrow{\imath}-2\overrightarrow{\jmath}$, autrement dit, $\mathscr{C}_f$ est l'image de $\mathscr{C}_g$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{\imath}+2\overrightarrow{\jmath}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$g(x)=\frac{2(x+1)^2-3(x+1)+5}{(x+1)^2-2(x+1)+3}-2=\frac{2x^2+x+4}{x^2+2}-2=\frac{x}{x^2+2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$g(-x)=\frac{-x}{(-x)^2+2}=\frac{-x}{x^2+2}=-\frac{x}{x^2+2}=-g(x)$$

La fonction g est donc impaire. Le point O est donc centre de symétrie de $\mathscr{C}_g$.

Par translation, $\boxed{\text{le point } I(1;2) \text{ est centre de symétrie de } \mathscr{C}_f.}$