

Chapitre 12

Probabilités

1/ Introduction

a) Expérience aléatoire

Définition

Une expérience dont on connaît les issues (les résultats) est appelée expérience aléatoire si on ne peut pas prévoir ni calculer l'issue qui sera réalisée.

L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire (aussi appelés éventualités) est appelé univers de l'expérience. On le note souvent Ω . Le nombre de ses éléments est appelé cardinal et se note $\text{Card } \Omega$.

Exemple : jeu de Pile ou Face, nombre obtenu suite au lancer d'un dé, nombre tiré au sort dans une loterie, couleur de la prochaine voiture qui passera dans la rue, vingt et unième mot d'un livre choisi au hasard...

b) Loi de probabilité

Définition

Définir une loi de probabilité sur un univers $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ c'est associer à chaque éventualité x_i un nombre p_i positif ou nul, appelé probabilité de l'éventualité x_i , tel que $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Conséquence : Pour tout i , $p_i \leq 1$.

c) Modélisation - Loi des grands nombres

Définition

Modéliser une expérience aléatoire d'univers Ω c'est choisir une loi de probabilité sur Ω qui représente le « mieux possible » la situation.

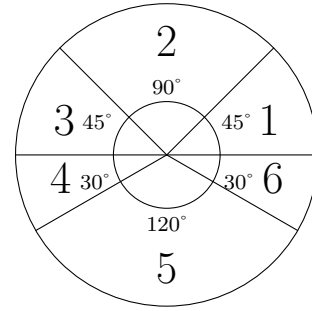
Exemple : On considère la roue de loterie suivante. L'expérience consiste à faire tourner la roue et à noter le nombre sur lequel elle s'arrête. Définir une loi de probabilité permettant de modéliser l'expérience.

L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

On associe à l'éventualité 1 la probabilité $p_1 = \frac{45}{360} = \frac{1}{8}$.

On fait de même pour les autres éventualités. On obtient le tableau suivant :

| | | | | | | |
|-------------|---------------|---------------|---------------|----------------|---------------|----------------|
| Éventualité | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Probabilité | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{12}$ |



Toutes les expériences ne sont pas aussi simples à modéliser que le lancer d'un dé équilibré. Cependant, pour construire ou valider un modèle, on dispose du résultat théorique ci-dessous appelé « Loi des grands nombres » :

Propriété

On considère une expérience d'univers Ω qui suit une loi de probabilité P . La fréquence d'obtention de chaque résultat x_i lorsqu'on réalise n fois l'expérience tend vers la probabilité de x_i lorsque n devient grand.

Exemple : Si l'on réalise un très grand nombre de fois l'expérience précédente (la roue de loterie), la fréquence d'obtention de « 1 » va se rapprocher de $\frac{1}{8}$, la fréquence d'obtention de « 2 » va se rapprocher de $\frac{1}{4}$, la fréquence d'obtention de « 3 » va se rapprocher de $\frac{1}{8}$...

Si, lors du lancer d'un dé, les fréquences d'apparition de chacune des faces ne se rapprochent pas de $\frac{1}{6}$, il est vraisemblable que le dé ne soit pas correctement équilibré.

2/ Vocabulaire des évènements

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω .

a) Définitions

Définition

On appelle évènement toute partie de Ω .

Un évènement élémentaire est un évènement qui ne contient qu'un seul élément.

L'univers Ω contient tous les résultats possibles, on l'appelle évènement certain.

L'ensemble vide \emptyset ne contient aucun résultat, on l'appelle évènement impossible.

Exemple : On reprend la situation précédente.

Déterminer la liste des éventualités des évènements suivants

A : « On obtient un nombre pair »

C : « On obtient un multiple de 5 »

B : « On obtient un nombre supérieur ou égal à 3 »

D : « On obtient un nombre négatif ».

$$A = \{2; 4; 6\}$$

$$C = \{5\}$$

$$B = \{3; 4; 5; 6\}$$

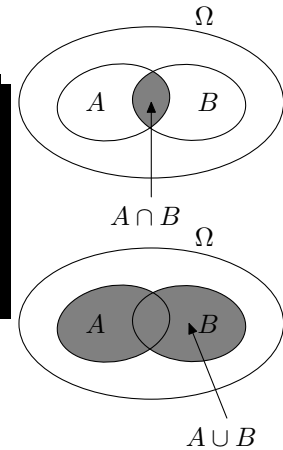
$$D = \emptyset$$

b) Intersection - Réunion

A et B sont deux évènements de Ω .

Définition

On appelle intersection de A et B l'évènement noté $A \cap B$ composé des éventualités qui appartiennent à la fois à A et à B .
 Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont incompatibles.
 On appelle réunion de A et B l'évènement noté $A \cup B$ composé des éventualités qui appartiennent à A ou à B (c'est-à-dire qui appartiennent à au moins l'un des deux).



Exemple : On reprend la situation précédente. Décrire par une phrase et déterminer les éventualités des évènements $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $B \cup C$.

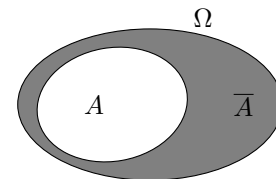
- $A \cap B$: « On obtient un nombre pair et supérieur ou égal à 3. »
 $A \cap B = \{4 ; 6\}$
- $A \cup B$: « On obtient un nombre pair ou supérieur ou égal à 3. »
 $A \cup B = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
- $A \cap C$: « On obtient un nombre pair et multiple de 5. »
 $A \cap C = \emptyset$
- $B \cup C$: « On obtient un nombre supérieur ou égal à 3 ou multiple de 5. »
 $B \cup C = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

c) Évènement contraire

A est un évènement de Ω .

Définition

On appelle contraire de A l'évènement noté \bar{A} constitué de toutes les éventualités qui n'appartiennent pas à A .



Exemple : On reprend la situation précédente. Décrire par une phrase et déterminer les éventualités des évènements \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} .

- \bar{A} : « On obtient un nombre impair. »
 $\bar{A} = \{1 ; 3 ; 5\}$
- \bar{B} : « On obtient un nombre strictement inférieur à 3. »
 $\bar{B} = \{1 ; 2\}$
- \bar{C} : « On obtient un nombre qui n'est pas multiple de 5. »
 $\bar{C} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6\}$

3/ Calcul des probabilités

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω muni d'une loi de probabilité.

a) Probabilité d'un évènement

Définition

Soit A un évènement de Ω . On appelle probabilité de A la somme des probabilités des éventualités qui le composent. On la note $P(A)$.

Conséquences :

$$P(\emptyset) = 0 \quad P(\Omega) = 1 \quad \text{Pour tout évènement } A, 0 \leq P(A) \leq 1.$$

Exemple : On reprend la situation précédente. Déterminer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.

- $P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$
- $P(B) = P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{8}$
- $P(C) = P(\{5\}) = \frac{1}{3}$

b) Propriétés

Propriété

Quels que soient les événements A et B de Ω :

- Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$

Exemple : On reprend la situation précédente. Déterminer $P(A \cup C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(\overline{A})$ et $P(\overline{C})$.

- $A \cap C = \emptyset$ donc $P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{5}{12} + \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$
- $A \cap B = \{4; 6\}$ donc $P(A \cap B) = P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{12} + \frac{5}{8} - \frac{1}{6} = \frac{7}{8}$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$ et $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

c) Loi équirépartie

Définition

On dit que P est une loi équirépartie si toutes les éventualités ont la même probabilité. Cette probabilité est alors égale à $\frac{1}{\text{Card } \Omega}$

Exemple : On lance un dé équilibré et on s'intéresse au nombre obtenu. Définir une loi de probabilité permettant de modéliser l'expérience.

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Le fait que le dé soit bien équilibré justifie le choix de la loi équirépartie. On obtient donc le tableau suivant :

| | | | | | | |
|-------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| Éventualité | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Probabilité | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Soit A un événement de Ω .

Propriété

Si P est une loi équirépartie alors

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre total de cas}}$$

Exemple : Dans le cas du lancer de dé équilibré, déterminer les probabilités de A : « On obtient un nombre pair », B : « On obtient un nombre supérieur ou égal à 3 » et C : « On obtient un multiple de 5 »

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad P(C) = \frac{\text{Card } C}{\text{Card } \Omega} = \frac{1}{6}$$

4/ Paramètres d'une loi de probabilité

On considère une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ dont les éventualités sont des nombres réels. Ω est muni d'une loi de probabilité P . On pose $p_i = P(x_i)$.

Définition

On appelle espérance de la loi de probabilité le réel μ défini par :

$$\mu = p_1x_1 + \dots + p_nx_n = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

C'est la moyenne des x_i avec les coefficients p_i .

On appelle variance de la loi de probabilité le réel V défini par :

$$V = p_1(x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n(x_n - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n p_i(x_i - \mu)^2 = \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i^2 \right) - \mu^2$$

On appelle écart-type de la loi de probabilité le réel σ défini par $\sigma = \sqrt{V}$

Exemple : On reprend la situation de la roue de loterie.

Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la loi de probabilité.

- Espérance : $\mu = \frac{1}{8} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 + \frac{1}{12} \times 4 + \frac{1}{3} \times 5 + \frac{1}{12} \times 6 = \frac{3}{24} + \frac{12}{24} + \frac{9}{24} + \frac{8}{24} + \frac{40}{24} + \frac{12}{24} = \frac{84}{24} = \frac{7}{2}$
- Variance : $V = \frac{1}{8} \times \left(1 - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \times \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \times \left(3 - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \times \left(4 - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \left(5 - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \times \left(6 - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} \times \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \times \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{32} + \frac{9}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{48} + \frac{9}{12} + \frac{25}{48} = \frac{8}{3}$
- Écart-type : $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{8}{3}} \simeq 1,63$

5/ Variables aléatoires

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω muni d'une loi de probabilité P .

a) Définitions

Définition

Une variable aléatoire X sur Ω est une fonction de Ω dans \mathbb{R} . X associe donc à toute éventualité de Ω un unique réel.

Remarque : On utilise les variables aléatoires quand on s'intéresse plus à un nombre associé au résultat de l'expérience (par ex. un gain...) qu'au résultat lui-même.

Exemple : On lance trois fois une pièce de monnaie et on s'intéresse au côté sur lequel elle tombe. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque éventualité associe le nombre de fois où PILE apparaît.

Déterminer l'univers Ω de cette expérience puis décrire X .

En notant P et F les résultats possibles d'un lancer, on obtient :

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$$

X est la fonction définie sur Ω par :

$$\begin{array}{llll} X(PPP) = 0 & X(PPF) = 1 & X(PFP) = 1 & X(PFF) = 2 \\ X(FPP) = 1 & X(FPF) = 2 & X(FFP) = 2 & X(FFF) = 3 \end{array}$$

Définition

Soit X une variable aléatoire sur Ω et soit $x \in \mathbb{R}$. L'évènement formé des éventualités ω_i de Ω telles que $X(\omega_i) = x$ se note $(X = x)$.

Exemple : On reprend la situation précédente.

Déterminer l'ensemble $(X = 2)$.

Avec les notations précédentes, on a : $(X = 2) = \{PFF, FPF, FFP\}$

b) Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition

Soit X une variable aléatoire sur Ω . On appelle $\Omega' = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X . On peut définir sur Ω' une loi de probabilité en associant à chaque valeur x_i la probabilité de l'évènement $(X = x_i)$. Cette loi est appelée loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Exemple : On reprend la situation précédente.

Déterminer la loi de probabilité de X .

La loi de probabilité P sur Ω est une loi équirépartie. On a donc :

$$P(X = 0) = P(\{PPP\}) = \frac{1}{8} \qquad P(X = 1) = P(\{PPF, PFP, FPP\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = P(\{PFF, FPF, FFP\}) = \frac{3}{8} \qquad P(X = 3) = P(\{FFF\}) = \frac{1}{8}$$

On peut aussi résumer ceci sous forme de tableau :

| | | | | |
|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

c) Paramètres d'une variable aléatoire

Définition

L'espérance, la variance, l'écart-type d'une variable aléatoire sont respectivement l'espérance, la variance, l'écart-type de sa loi de probabilité.

Si X prend les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n et si on pose $p_i = P(X = x_i)$, on a :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i; \quad V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (E(X))^2; \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exemple : On reprend la situation précédente.

Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X .

- Espérance : $E(X) = \frac{1}{8} \times 0 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$
- Variance : $V(X) = \frac{1}{8} \times \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \times \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \times \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \times \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} \times \frac{9}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{9}{4} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$
- Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,87$