Chapitre 8

Applications du produit scalaire

1/ Équations de droites

a) Définition

Définition

Un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ est dit normal à une droite d si la direction de $\overrightarrow{n}$ est orthogonale à celle de d.

b) Propriétés

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

1/ Une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.

2/ Étant donnés trois réels a, b et c où a et b ne sont pas nuls simultanément, l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Démonstration

1/ Soit d une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et soit $A(x_0; y_0) \in d$.

Soit $M(x; y)$, on a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$

$M(x; y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow (x - x_0)a + (y - y_0)b = 0 \Leftrightarrow ax + by + c = 0$ avec $c = -ax_0 - by_0$.

2/ Soit d l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax+by+c = 0$ et soit $A(x_A, y_A) \in d$.

$M(x; y) \in d \Leftrightarrow ax + by + c = 0 = ax_A + by_A + c$

$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{n}.\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n}$

$\Leftrightarrow M$ appartient à la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

Exemple : Dans un repère orthonormal, on considère les points $A(3; -1)$ et $B(2; 4)$. Déterminer une équation de la médiatrice m de $[AB]$.

La médiatrice de [AB] est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu I de $[AB]$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ donc une équation de m est de la forme $-x + 5y + c = 0$.

De plus, $I\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right) \in m$ donc $-\frac{5}{2}+5\times\frac{3}{2}+c=0$ donc $c=-5$.
Une équation de m est donc $-x+5y-5=0$.

2/ Équations de cercles

a) Forme générale

Propriété

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormal.
Une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(x_A;y_A)$ et de rayon R est

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$$

Démonstration

$M(x;y)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow AM=R \Leftrightarrow AM^2=R^2 \Leftrightarrow (x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$.

Exemple : Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormal.
Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M(x;y)$ tels que $x^2+y^2-6x+2y+5=0$?

$$\begin{aligned} M(x;y)\in\mathscr{E} &\Leftrightarrow x^2+y^2-6x+2y+5=0 \Leftrightarrow x^2-6x+y^2+2y+5=0\\ &\Leftrightarrow (x-3)^2-9+(y+1)^2-1+5=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=5\end{aligned}$$

$\mathscr{E}$ est donc le cercle de centre $C(3;-1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

b) Cercle de diamètre donné

Propriété

On considère deux points A et B du plan. Le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

Démonstration

$$M\in\mathscr{C} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ll} & M=A\\ \text{ou} & M=B\\ \text{ou} & AMB \text{ est un triangle rectangle en } M\end{array}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0.$$

Exemple : Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormal.
Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ avec $A(2;2)$ et $B(6;-2)$.

Soit $M(x;y)$. On a $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}2-x\\2-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}6-x\\-2-y\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M(x;y)\in\mathscr{C} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow (2-x)(6-x)+(2-y)(-2-y)=0\\ &\Leftrightarrow 12-8x+x^2-4-2y+2y+y^2=0\end{aligned}$$

Une équation de $\mathscr{C}$ est donc $x^2+y^2-8x+8=0$.

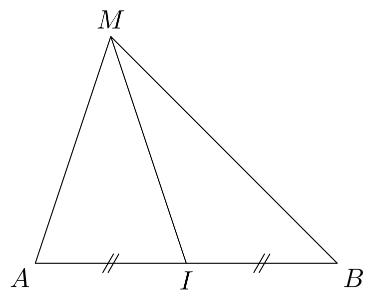
3/ Longueurs et angles dans un triangle

a) Théorème de la médiane

Propriété

On considère deux points A et B du plan et I le milieu de $[AB]$. Pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$$



Démonstration

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\ &= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2 \end{aligned}$$

Or I est le milieu de $[AB]$ donc $IA = IB = \frac{1}{2}AB$ donc $IA^2 = IB^2 = \frac{1}{4}AB^2$

De plus $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.

Ainsi $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2 \times \frac{1}{4}AB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$.

Exemple : ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 12$. Calculer AI où I est le milieu de $[BC]$.

D'après le théorème de la médiane : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

On a donc $2AI^2 = 6^2 + 8^2 - \frac{1}{2} \times 12^2 = 28$.

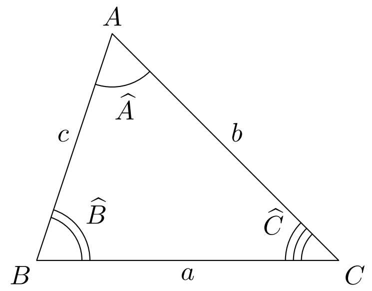
Ainsi $AI = \sqrt{14}$.

b) Formules d'Al Kashi

Propriété

On considère un triangle ABC. On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{C} = \widehat{ACB}$. On a :

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A}) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{B}) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C}) \end{aligned}$$



Démonstration

$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = BA^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Ainsi $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ soit $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$

Exemple : ABC est un triangle tel que $AC = 9$, $AB = 5$ et $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$. Calculer BC.

D'après la formule d'Al Kashi :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{A}) = 5^2 + 9^2 - 2 \times 5 \times 9 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 61$

Ainsi $BC = \sqrt{61}$

c) Aire d'un triangle

Propriété

On considère un triangle ABC et on appelle S son aire. Avec les notations ci-dessus, on a :

$$S = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}ac\sin(\widehat{B}) = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C})$$

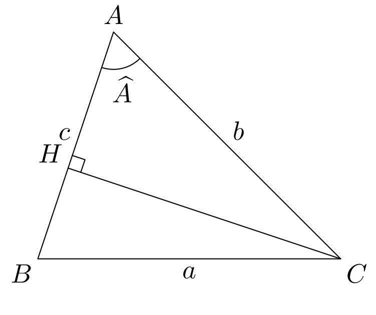
Démonstration

Soit H le projeté orthogonal de C sur AB. On a alors $S = \frac{1}{2}AB \times CH$.

Si l'angle $\widehat{A}$ est aigu alors $CH = AC\sin(\widehat{A})$.

Si l'angle $\widehat{A}$ est obtus alors $CH = AC\sin(\pi - \widehat{A}) = AC\sin(\widehat{A})$

Dans tous les cas $S = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin(\widehat{A})$.



d) Formule des sinus

Propriété

On considère un triangle ABC. Avec les notations ci-dessus, on a :

$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$$

Démonstration

On a $S = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}ac\sin(\widehat{B}) = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C})$

donc $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin(\widehat{A})}{a} = \frac{\sin(\widehat{B})}{b} = \frac{\sin(\widehat{C})}{c}$

ainsi $\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$.

Exemple : ABC est un triangle tel que $BC = 5$, $\widehat{B} = 50°$ et $\widehat{C} = 75°$. Calculer AB et AC et donner les valeurs arrondies au dixième.

$\widehat{A} = 180° - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 55°$

$\frac{AB}{\sin(\widehat{C})} = \frac{AC}{\sin(\widehat{B})} = \frac{BC}{\sin(\widehat{A})} \Leftrightarrow \frac{AB}{\sin(75°)} = \frac{AC}{\sin(50°)} = \frac{5}{\sin(55°)}$

On a donc $AB = \frac{5\sin(75°)}{\sin(55°)} \simeq 5,9$ et $AC = \frac{5\sin(50°)}{\sin(55°)} \simeq 4,7$.