Chapitre 7

Produit scalaire

Dans tout le chapitre, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ désignent deux vecteurs du plan.
Une unité de longueur est fixée.

1/ Définition

Définition

On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre réel noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ et défini par :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \begin{cases} \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) & \text{si } \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \text{ et } \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0} \\ 0 & \text{si } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

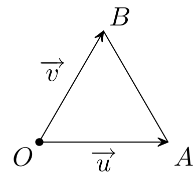
Le produit scalaire d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ par lui-même ($\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$) est appelé carré scalaire de $\overrightarrow{u}$ et se note $\overrightarrow{u}^2$.

Remarque : Le produit scalaire est donc une opération dont les arguments sont des vecteurs et dont le résultat est réel.

Exemple : Sur la figure ci-contre, le triangle OAB est équilatéral et $OA = 2$.
Calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$.

On a $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 2$ et $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \dfrac{\pi}{3}$

Ainsi $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 2 \times 2 \times \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2 \times 2 \times \dfrac{1}{2} = 2$



2/ Autres expressions du produit scalaire

a) Cas des vecteurs colinéaires

Propriété

– Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens alors

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$$

– Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de sens contraires alors

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$$

Démonstration

– Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 0$
Ainsi, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos 0 = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$

– Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de sens contraires, alors $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \pi$
Ainsi, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\pi = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$

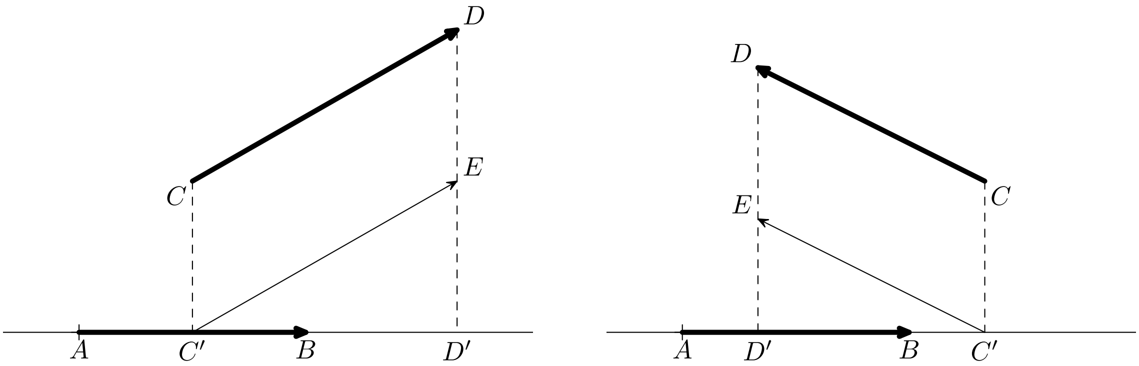
Conséquences :

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} > 0$ et si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et sens contraires alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} < 0$
- Quel que soit le vecteur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$

b) Avec des projetés orthogonaux

Propriété

Soient A, B, C et D quatre points du plan.
Si C' et D' sont les projeté orthogonaux de C et D sur (AB) alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$

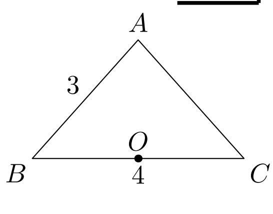


Démonstration

Soit E le point tel que $\overrightarrow{C'E} = \overrightarrow{CD}$.
On a alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'E} = AB \times C'E \times \cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{C'E})$.

- Si l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{C'E})$ est droit alors $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{C'E}) = \cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = 0$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'} = 0$.
- Si l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{C'E})$ est aigu alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ sont colinéaires et de même sens et $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{C'E}) = \dfrac{C'D'}{C'E}$
  Ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB \times C'E \times \dfrac{C'D'}{C'E} = AB \times C'D' = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$.
- Si l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{C'E})$ est obtus alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ sont colinéaires et de sens contraires et $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{C'E}) = -\dfrac{C'D'}{C'E}$
  Ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -AB \times C'E \times \dfrac{C'D'}{C'E} = -AB \times C'D' = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$.

Exemple : ABC est un triangle isocèle en A tel que $AB = 3$ et $BC = 4$.
O est le milieu du segment $[BC]$. Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}$.



Le projeté orthogonal de A sur (BC) est O donc
$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} = BO \times BC = 2 \times 3 = 6$
Le projeté orthogonal de A sur (BC) est O donc
$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CO}.\overrightarrow{BC} = -CO \times BC = -2 \times 3 = -6$

c) Dans un repère

Propriété

Soit $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal du plan.
Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$.

Démonstration

Soit A le point tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ et B le point tel que $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$.

1/ Cas des vecteurs colinéaires.

Il existe k tel que $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$. Ainsi $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

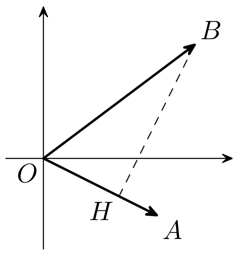
- Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires et de même sens alors $k > 0$ et $OB = kOA$.
  On a alors $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB = k \times OA \times OA = kOA^2$.
- Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires et de même sens contraire alors $k < 0$ et $OB = -kOA$.
  On a alors $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -OA \times OB = k \times OA \times OA = kOA^2$.

Ainsi $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = k(x^2 + y^2) = kxx + kyy = xx' + yy'$

2/ Cas des vecteurs quelconques.

Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA).
On a alors, d'après ce qui précède,

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = xx_H + yy_H$$



En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles OBH et ABH rectangles en H, on obtient :

$$BH^2 = OB^2 - OH^2 = AB^2 - AH^2$$

ce qui nous donne :

$$x'^2 + y'^2 - x_H^2 - y_H^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 - (x - x_H)^2 - (y - y_H)^2$$

puis, en simplifiant :

$$0 = -2xx' - 2yy' + 2xx_H + 2yy_H$$

soit :

$$xx_H + yy_H = xx' + yy'$$

On en déduit donc : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = xx' + yy'$.

Exemple : Dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$.

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 6 \times 3 + 3 \times (-1) = 18 - 3 = 15$
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = 6 \times (-2) + 3 \times 2 = -12 + 6 = -6$
$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} = 3 \times (-2) + (-1) \times 2 = -6 - 2 = -8$

3/ Règles de calcul

Propriété

Quels que soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

- $\overrightarrow{0}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{0} = 0$
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$ (On dit que le produit scalaire est symétrique)
- $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) = k \times (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$ et $(k\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = k \times (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$

(On dit que le produit scalaire est bilinéaire)

Démonstration

- Le premier résultat est une conséquence directe de la définition.
- Le deuxième résultat est aussi une conséquence de la définition ($\cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \cos(\overrightarrow{v}; \overrightarrow{u})$).

– On se place dans un repère orthonormal du plan et on pose $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$
  Les coordonnées de $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$ sont $\begin{pmatrix}x'+x''\\y'+y''\end{pmatrix}$.
  On a ainsi, $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = x(x'+x'') + y(y'+y'') = xx' + xx'' + yy' + yy''$.
  De plus $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = xx' + yy' + xx'' + yy''$.
  Conclusion : $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$
  Les coordonnées de $k\overrightarrow{v}$ sont $\begin{pmatrix}kx'\\ky'\end{pmatrix}$.
  On a ainsi $\overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) = x(kx') + y(ky') = kxx' + kyy'$.
  De plus $k\times(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) = k(xx'+yy') = kxx' + kyy'$
  Conclusion $\overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) = k\times(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$
– Le quatrième résultat se démontre en utilisant les deux précédents.

Exemple : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs, simplifier $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2$, $(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2$ et $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})$.

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 &= (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).\overrightarrow{v}\\
&= \overrightarrow{u}^2 + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2\\
(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2 &= (\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}).\overrightarrow{u} - (\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}).\overrightarrow{v}\\
&= \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2\\
(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) &= \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}^2 = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2
\end{aligned}$$

4/ Vecteurs orthogonaux

a) Définition

Définition

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \text{ ou } (OA)\perp(OB)$$

b) Propriété

Propriété

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Démonstration

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 0\\
&\Leftrightarrow \|\overrightarrow{u}\| = 0 \text{ ou } \|\overrightarrow{v}\| = 0 \text{ ou } \cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 0\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \text{ ou } (\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{2} + k\times 2\pi\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux}
\end{aligned}$$

Exemple : Dans un repère orthonormal $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$, on donne $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix}$.
Démontrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 6\times 6 + 4\times(-9) = 36 - 36 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont donc orthogonaux.