Chapitre 2

Polynômes du second degré

1/ Généralités sur les polynômes

a) Définition

Définition

On appelle fonction polynôme toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

où a_0, a_1, …, a_n sont des réels donnés.

Exemple : $x \mapsto -x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ *est un polynôme.* $x \mapsto \dfrac{x^4 - 4}{x^2 + 2}$ *n'est pas un polynôme.*

b) Propriétés (admises)

Propriété

1/ Soit P le polynôme défini par $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
P est le polynôme nul $\Longleftrightarrow a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

2/ Soient P et Q les polynômes définis par $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ et $Q(x) = b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ avec $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$.

$$P = Q \Longleftrightarrow \begin{cases} n = p \\ a_0 = b_0 \,;\, a_1 = b_1 \,;\, \cdots\, a_n = b_n \end{cases}$$

Conséquence : L'écriture d'un polynôme est unique.

Exemple : Si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 2x^3 - x + 2$ *alors* $a = 2$, $b = 0$, $c = -1$ *et* $d = 1$.

c) Degré

Définition

Soit P un polynôme défini par $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$.
Le nombre n est appelé degré de P.

Exemple : $x \mapsto -x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ *est un polynôme de degré 3.* $x \mapsto 3x - x^5$ *est un polynôme de degré 5.*

d) Racines d'une fonction

Définition

Soit f une fonction. On appelle racine de f toute solution de l'équation $f(x) = 0$.

Exemple : 1 est une racine de $x \mapsto -x^3 - 5x^2 + 7x - 1$. *0 est une racine de* $x \mapsto 3x - x^5$.

2/ Polynômes du second degré

Dans tout le paragraphe, P désigne un polynôme défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

a) Forme canonique

Propriété et définition

Il existe des réels α et β tels que :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ P(x) = a\left((x+\alpha)^2 + \beta\right).$$

Cette écriture est appelée forme canonique de P.

Remarque : On appelle parfois forme canonique l'écriture de P sous la forme

$$P(x) = a(x+\alpha)^2 + \gamma$$

Démonstration

$$\begin{aligned} P(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

Exemple : Écrire la forme canonique du polynôme défini par $P(x) = 2x^2 + 4x + 6$.

$P(x) = 2x^2 + 4x + 6 = 2\left(x^2 + 2x + 3\right) = 2\left((x+1)^2 - 1 + 3\right) = 2\left((x+1)^2 + 2\right)$

b) Discriminant

Définition

On appelle discriminant de P le réel Δ défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemple : Calculer le discriminant du polynôme défini par $P(x) = 2x^2 + 4x + 6$.

$\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times 6 = 16 - 48 = -32$.

c) Racines

Propriété

Les racines de P peuvent être déterminée de la façon suivante :

– Si $\Delta < 0$ alors P n'a pas de racine réelle.

– Si $\Delta = 0$ alors P admet une racine réelle : $-\dfrac{b}{2a}$.

– Si $\Delta > 0$ alors P admet deux racines réelles : $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Démonstration

$$P(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

- Si $\Delta < 0$ alors $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc pour tout x, $P(x) \neq 0$.
- Si $\Delta = 0$ alors $P(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ donc $P(x) = 0 \iff x = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$ alors $P(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

  donc

$$P(x) = 0 \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \quad \text{ou} \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$\iff x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemple : Déterminer les racines de P et Q définis par

$$P(x) = 2x^2 + 4x + 6 \quad \text{et} \quad Q(x) = -x^2 - 2x + 1$$

Pour P : $\Delta = -32 < 0$ donc P n'a pas de racine.
Pour Q : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 4 + 4 = 8 > 0$ donc Q admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2\times(-1)} = \frac{2-2\sqrt{2}}{-2} = -1+\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2\times(-1)} = \frac{2+2\sqrt{2}}{-2} = -1-\sqrt{2}$$

d) Liens entre coefficients et racines

Propriété

Si P admet deux racines x_1 et x_2 alors $\begin{cases} r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1 r_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Démonstration

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

e) Factorisation

Propriété

- Si $\Delta < 0$ alors P ne peut pas être factorisé.
- Si $\Delta = 0$ alors $P(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$
- Si $\Delta > 0$ alors $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines de P.

Démonstration

Le premier résultat s'obtient en remarquant que si P pouvait se factoriser, on aurait deux facteurs du premier degré auquel cas l'équation $P(x) = 0$ admettrait au moins une solution, ce qui est contradictoire avec le résultat obtenu précédemment. Les deux autres résultats ont été obtenus dans le cours de la démonstration précédente.

Exemple : Factoriser P et Q définis par

$$P(x) = 2x^2 + 4x + 6 \quad et \quad Q(x) = -x^2 - 2x + 1$$

Pour P : $\Delta = -32 < 0$ donc P ne peut pas se factoriser.
Pour Q : Les racines sont $-1 + \sqrt{2}$ et $-1 + \sqrt{2}$ donc $P(x) = -(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$.

f) Signe

Propriété

– Si $\Delta < 0$ alors

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $P(x)$		Signe de a	

– Si $\Delta = 0$ alors

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
Signe de $P(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

– Si $\Delta > 0$ alors

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $P(x)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

où x_1 et x_2 sont les racines de P et $x_1 < x_2$

Démonstration

– Si $\Delta < 0$ alors $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc $P(x)$ est du signe de a.

– Si $\Delta = 0$ alors $P(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ qui est du signe de a sauf pour $-\dfrac{b}{2a}$.

– Si $\Delta > 0$ alors $P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ où r_1 et r_2 sont les racines de P. On peut donc dresser le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		Signe de a		Signe de a		Signe de a	
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $P(x)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

Exemple : Déterminer le tableau de signe de P et Q définis par

$$P(x) = 2x^2 + 4x + 6 \quad et \quad Q(x) = -x^2 - 2x + 1$$

Pour P : $\Delta > 0$ donc

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$+$	

Pour Q : Les racines sont $-1 - \sqrt{2}$ et $-1 + \sqrt{2}$ et de plus $-1 < 0$ donc

x	$-\infty$		$-1 - \sqrt{2}$		$-1 + \sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

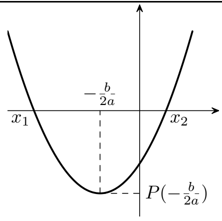
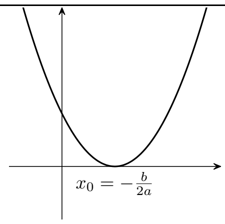
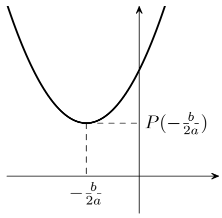
g) Représentation graphique

Propriété

Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère du plan.

La représentation graphique de P est l'image par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -\frac{b}{2a} \\ -\frac{\Delta}{4a} \end{pmatrix}$ de la parabole représentant la fonction $x \mapsto ax^2$.
C'est donc une parabole de sommet $S\left(-\frac{b}{2a}; P(-\frac{b}{2a})\right)$.

Illustration :

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Factorisation de $P(x)$	$a(x - x_1)(x - x_2)$	$a(x - x_0)^2$	pas de factorisation
Équation $P(x) = 0$	2 solutions x_1 et x_2	une solution x_0	pas de solution
$a > 0$			
$a < 0$