Problèmes se ramenant au second degré

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes :

1/ $(E_1) : x^4 - x^2 - 2 = 0$ $(E_2) : 4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$

2/ $(E_3) : x - \sqrt{x} - 2 = 0$ $(E_4) : 4x - 13\sqrt{x} + 3 = 0$

3/ $(E_5) : \left(\dfrac{x}{2-x}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{2-x}\right) - 2 = 0$

Exercice 2

1/ Compléter l'équivalence sans utiliser le symbole $\sqrt{\ }$: $\sqrt{a} = b \Longleftrightarrow \dots$

2/ Résoudre les équations suivantes :

$(E_6) : \sqrt{2x^2 - 3x - 1} = x - 1$ $(E_7) : \sqrt{-3x^2 + 5x + 13} = x - 4$

Exercice 3

1/ Compléter l'équivalence sans utiliser le symbole $\sqrt{\ }$: $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Longleftrightarrow \dots$

2/ Résoudre les équations suivantes :

$(E_8) : \sqrt{2x^2 - x - 5} = \sqrt{x^2 - 3}$ $(E_9) : \sqrt{4x^2 - 9x + 4} = \sqrt{4x + 1}$

Exercice 4

Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.
On cherche à résoudre l'équation $(E_{10}) : P(x) = 0$

1/ Vérifier que 1 est solution de (E_{10}).

2/ Déterminer trois réels a, b et c tels que $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
(*D'une façon générale, on admettra que tout polynôme admettant α comme racine peut se factoriser par $(x - \alpha)$*)

3/ Résoudre (E_{10}).

Exercice 5

1/ En utilisant la méthode de l'exercice précédent, déterminer les racines des polynômes suivants :

$P(x) = 4x^3 - 9x^2 - 10x + 3$ $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 3$

$R(x) = x^3 + \dfrac{133}{60}x^2 - \dfrac{161}{120}x - \dfrac{19}{12}$

On pourra s'aider d'une calculatrice graphique...

2/ Déterminer l'ensemble de définition puis simplifier la fraction rationnelle suivante :

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x - 2}{x^3 - x^2 - 10x + 6}$$

Exercice 6

On considère l'équation $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0 \quad (E_{11})$

1/ Vérifier que 0 n'est pas solution de (E_{11}) et établir que (E_{11}) équivaut à l'équation :

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0$$

2/ On pose $u = x + \dfrac{1}{x}$. Calculer u^2, et établir que l'équation (E_{11}) équivaut à

$$\begin{cases} u = x + \dfrac{1}{x} \\ 2u^2 - 9u + 10 = 0 \end{cases}$$

3/ En déduire les solutions de l'équation (E_{11}).

Exercice 7

Résoudre l'équation $(E_{12}) : x^2 + |x - 1| + x - 7 = 0$