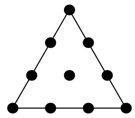
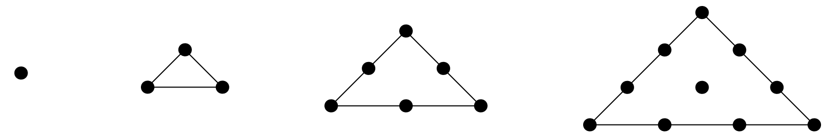
Suites numériques

Exercice 1 Les nombres triangulaires



Les disciples de Pythagore (VI$^{\text{e}}$ siècle av. J.-C.) vénéraient les nombres entiers. Leur symbole, la « Tetraktys » représentait le « Dix Divin ».

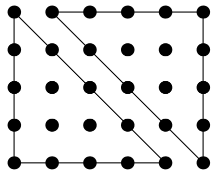
Dix est en fait le 4$^{\text{e}}$ nombre de la « collection » des nombres triangulaires :



$T_1 = 1$ $T_2 = 3$ $T_3 = 6$ $T_4 = 10$

1/ a) Représenter le 5$^{\text{e}}$ nombre triangulaire noté T_5 et donner sa valeur.

b) Peut-on déterminer aussi facilement le 100$^{\text{e}}$ nombre noté T_{100} ?



c) Pour étudier les propriétés de ces nombres, les pythagoriciens utilisaient des procédés géométriques : à l'aide du diagramme ci-contre, déterminer $2 \times T_5$ et retrouver la valeur de T_5.

2/ Plus généralement, appelons T_n le n^{e} nombre triangulaire. La juxtaposition de deux triangles rectangles isocèles représentant T_n donne un rectangle.

a) Indiquer le nombre de lignes et de colonnes de ce rectangle.

b) En déduire l'expression de T_n en fonction de n.

3/ Exprimer T_{n+1}, $T_{n+1} - T_n$, $\dfrac{T_{n+1}}{T_n}$ en fonction de n.

4/ a) Donner la valeur de T_{100}. Quelle est la somme des n premiers entiers naturels non nuls ?

b) Calculer la somme S des 1000 premiers entiers naturels non nuls.

- À chaque entier $n \geqslant 1$, on associe un nombre triangulaire noté T_n : on dit que T ou $(T_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite numérique.
- Les nombres T_1, T_2, T_3,... sont les termes de la suite.
- La relation $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ permet de calculer directement T_n en fonction de n. On dit que T est définie sous forme fonctionnelle.

Exercice 2 Approcher $\sqrt{2}$

On désire approcher $\sqrt{2}$ par des nombres rationnels.

1/ a) Vérifier l'égalité suivante :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

b) En déduire les égalités :

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}$$

On pourrait alors être tenté d'écrire :

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}}$$

Mais il faudrait donner un sens à cette écriture...

2/ Pour approcher ce nombre à l'aide de rationnels, on définit les nombres suivants :

$$F_1 = 1\,; \qquad F_2 = 1 + \frac{1}{2}\,; \qquad F_3 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}\,; \qquad F_4 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$$

a) Simplifier chacune des fractions précédentes.

b) Écrire, de la même manière, F_5 et F_6.

c) Pour calculer plus rapidement ces nombres, il peut être utile de remarquer que chacun se calcule à partir de celui qui le précède.

Vérifier que :

$$F_2 = 1 + \frac{1}{1 + F_1}\,; \qquad F_3 = 1 + \frac{1}{1 + F_4}\,; \qquad F_4 = 1 + \frac{1}{1 + F_5}.$$

d) Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 + \frac{1}{1 + x}$$

Reprendre les égalité précédentes en utilisant la fonction g.

e) Écrire une relation liant F_{n+1} et F_n.

f) En partant F_1, combien de fois faut-il appliquer g pour obtenir F_6 ? F_{10} ? F_n ?

3/ Les égalités du début de l'exercice suggèrent que F_n se rapproche de $\sqrt{2}$ quand n devient grand.

La touche « ANS » d'une calculatrice permet de récupérer le résultat du dernier calcul effectué. On peut donc, pour obtenir les différents termes, effectuer les calculs suivants :

Sur une Casio :

$\boxed{1}\,\boxed{\text{EXE}}$

$\boxed{1}\,\boxed{+}\,\boxed{1}\,\boxed{\div}\,\boxed{(}\,\boxed{1}\,\boxed{+}\,\boxed{\text{SHIFT}}\,\boxed{(-)}\,\boxed{)}\,\boxed{\text{EXE}}\,\boxed{\text{EXE}}\,\boxed{\text{EXE}}\,\boxed{\text{EXE}}\,\boxed{\text{EXE}}\ \dots$

Sur une T.I. :

$\boxed{1}\,\boxed{\text{ENTER}}$

$\boxed{1}\,\boxed{+}\,\boxed{1}\,\boxed{\div}\,\boxed{(}\,\boxed{1}\,\boxed{+}\,\boxed{\text{2ND}}\,\boxed{(-)}\,\boxed{)}\,\boxed{\text{ENTER}}\,\boxed{\text{ENTER}}\,\boxed{\text{ENTER}}\,\boxed{\text{ENTER}}\,\boxed{\text{ENTER}}\ \dots$

Que remarque-t-on ?

- On dit que la suite numérique $(F_n)_{n\geqslant 1}$ est définie par récurrence car chaque terme se calcule en fonction du précédent.
- On dit que $(F_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\sqrt{2}$.

Exercice 3 Deux modes de génération

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

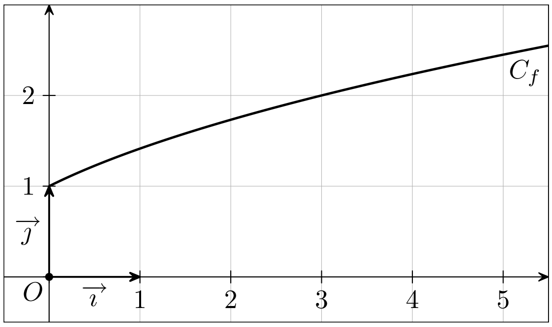
$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

Partie A

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = f(n)$.

1/ Donner les valeurs exactes des cinq premiers termes de la suite (u_n).

2/ On a représenté ci-contre la courbe C_f d'équation $y = f(x)$. Faire apparaître sur le graphique les cinq premiers termes de la suite.



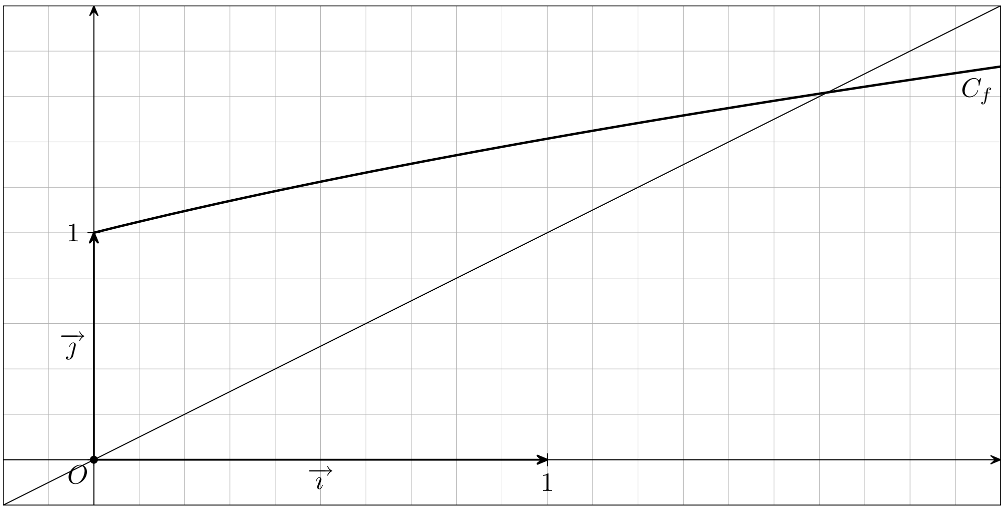
Partie B

Soit (v_n) la suite telle que :

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = f(v_n) \quad \text{pour } n \geqslant 1 \end{cases}$$

1/ Donner les valeurs exactes des cinq premiers termes de la suite (v_n).

2/ On a représenté ci-contre la courbe C_f et la droite d d'équation $y = x$.



a) Placer le point $A_1(v_1; f(v_1))$ c'est-à-dire $(v_1; v_2)$.

b) Utiliser A_1 et la droite d pour placer le point $B_2(v_2; v_2)$.

c) Placer le point $A_2(v_2; v_3)$ puis le point $B_3(v_3; v_3)$. On fait ainsi apparaître les différents termes de la suite (v_n) sur l'axe des abscisses.

3/ Résoudre l'équation $f(x) = x$.

4/ Vers quelle valeur semble converger la suite (v_n) ?

Bien que les deux suites fassent intervenir la même fonction, elles sont très différentes car leur mode de génération est différent.