Devoir surveillé n° 6

Durée : 1 heure

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par I le point d'affixe $z_I = 1$, par A le point d'affixe $z_A = 1 - 2\mathrm{i}$, par B le point d'affixe $z_B = -2 + 2\mathrm{i}$ et par $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$.
On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1/ Déterminer le centre Ω du cercle $\mathscr{C}$ et calculer son rayon.

2/ Soit D le point d'affixe $z_D = \dfrac{3 + 9\mathrm{i}}{4 + 2\mathrm{i}}$.

Écrire z_D sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle $\mathscr{C}$.

3/ Sur le cercle $(\mathscr{C})$, on considère le point E, d'affixe z_E, tel qu'une mesure en radians de $\left(\overrightarrow{\Omega I},\ \overrightarrow{\Omega E}\right)$ est $\dfrac{\pi}{4}$.

a) Préciser le module et un argument de $z_E + \dfrac{1}{2}$.

b) En déduire que $z_E = \dfrac{5\sqrt{2} - 2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}$.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1/ a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$$

On appellera z_1 et z_2 les solutions de (E), z_1 ayant une partie imaginaire positive.

b) Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2/ a) Placer dans le plan les points A d'affixe 2, B d'affixe z_1, C d'affixe z_2 et I le milieu de $[AB]$.

b) Démontrer que le triangle OAB est isocèle. En déduire une mesure de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OI})$.

c) Calculer l'affixe z_I de I puis le module de z_I.

d) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$