Devoir surveillé n° 6
Terminale 7 S - 2010/2011
3 février 2011 – Durée : 1 heure 30

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation d'inconnue z :
$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$$
2. On considère les points A d'affixe $z_A = \sqrt{3} - \mathrm{i}$, B d'affixe $z_B = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et C le milieu de $[OB]$ d'affixe z_C.
   a) Déterminer la forme exponentielle de z_A, z_B et z_C.
   b) Sur une figure, placer les points A, B et C, en prenant 2 cm pour unité.
   c) Montrer que le triangle OAB est équilatéral.
3. Soit D l'image de C par la rotation r de centre O, d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et E l'image de D par la translation t de vecteur $2\vec{v}$.
   a) Placer les points D et E sur la figure.
   b) Montrer que l'affixe z_E du point E vérifie : $z_E = \dfrac{1}{2}\left[1 + \mathrm{i}\left(4 - \sqrt{3}\right)\right]$.
   c) Montrer que $ABED$ est un parallélogramme.
   d) Montrer que $OE = BE = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.
4. Montrer que les points A, C et E sont alignés.

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On sait que si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors :
$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$
Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Démontrer que :
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

Partie B

On note A et B les points d'affixes respectives $-\mathrm{i}$ et $3\mathrm{i}$.
On note f l'application qui, à tout point M du plan, d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que :
$$z' = \frac{\mathrm{i}z + 3}{z + \mathrm{i}}$$

1. Étude de quelques cas particuliers.
   a) Démontrer que f admet deux points invariants J et K appartenant au cercle de diamètre $[AB]$.
   Placer ces points sur le dessin.
   b) On note C le point d'affixe $c = -2 + \mathrm{i}$. Démontrer que le point C', image de C par f, appartient à l'axe des abscisses.
2. Pour tout point M du plan distinct de A et B, démontrer que :
$$\arg\left(z'\right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) + \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$
3. Étude de deux ensembles de points.
   a) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un nombre complexe imaginaire pur.
   b) Soit M d'affixe z un point du cercie de diamètre $[AB]$ privé des points A et B. À quel ensemble appartient le point M' ?