Devoir surveillé n° 6
Terminale 7 S - 2010/2011
Éléments de correction

Exercice 1

1. Cette équation est une équation de degré 2 à coefficients réels dont le discriminant Δ vérifie :

$$\Delta = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4\times 4 = -4 < 0$$

Cette équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3}+\mathrm{i}\sqrt{4}}{2} = \sqrt{3}+\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{3}-\mathrm{i}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est : $\boxed{\left\{\sqrt{3}+\mathrm{i}; \sqrt{3}-\mathrm{i}\right\}.}$

2. a)
   - $|z_A| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$
   - Si θ est un argument de z_A, on a :
   $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$ donc $\theta = -\dfrac{\pi}{6} \quad (2\pi)$

   On en déduit : $\boxed{z_A = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$

   $z_B = \overline{z_A}$ donc $\boxed{z_B = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$

   $z_C = \dfrac{z_B}{2}$ donc $\boxed{z_C = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$

   b)

   c) Première méthode :
   - $OA = |z_A| = 2$
   - $OB = |z_B| = 2$
   - $AB = |z_B - z_A| = \left|\sqrt{3}+\mathrm{i}-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right| = |2\mathrm{i}| = 2$

   Le triangle OAB est donc équilatéral.

   Deuxième méthode :
   $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \times z_A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = z_B$.
   Le point B est donc l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

   Le triangle OAB est donc équilatéral.

3. a)

   b) D est l'image de C par la rotation r de centre O donc :

$$z_D = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} z_C = -\mathrm{i}\frac{z_B}{2} = -\mathrm{i}\times\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$$

   E est l'image de D par la translation t de vecteur $2\vec{v}$ donc :

$$z_E = z_D + 2\mathrm{i} = \frac{1}{2}\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right) + 2\mathrm{i} = \frac{1}{2}\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}+4\mathrm{i}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{i}\left(4-\sqrt{3}\right)\right)$$

   ainsi, $\boxed{z_E = \dfrac{1}{2}\left(1+\mathrm{i}\left(4-\sqrt{3}\right)\right)}$

   c) $z_B - z_A = \sqrt{3}+\mathrm{i}-\sqrt{3}+\mathrm{i} = 2\mathrm{i}$ et $z_E = z_D + 2\mathrm{i}$ donc $z_E - z_D = 2\mathrm{i}$. On a donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$ donc **$ABED$ est un parallélogramme.**

   d)
   - $OE = |z_E| = \sqrt{\dfrac{1^2+\left(4-\sqrt{3}\right)^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{1+16-8\sqrt{3}+3}{4}} = \sqrt{\dfrac{20-8\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{5-2\sqrt{3}}$
   - $BE = AD = |z_D - z_A| = \left|\dfrac{1}{2}\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right) - \sqrt{3}+\mathrm{i}\right| = \left|\dfrac{1}{2}\left(1-2\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(2-\sqrt{3}\right)\right)\right|$

$$= \sqrt{\frac{\left(1-2\sqrt{3}\right)^2+\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4}} = \sqrt{\frac{1-4\sqrt{3}+12+4-4\sqrt{3}+3}{4}} = \sqrt{\frac{20-8\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{5-2\sqrt{3}}$$

On a donc : $\boxed{OE = BE = \sqrt{5-2\sqrt{3}}.}$

4. – C est le milieu de $[OB]$.
   – $OE = BE$ donc E est sur la médiatrice de $[OB]$.
   – $OA = AB$ donc A est sur la médiatrice de $[OB]$.

   Les trois points A, E et C appartiennent à la médiatrice de $[AB]$ donc **A, E et C sont alignés.**

Exercice 2

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) + \arg(z') = \arg\left(\frac{z}{z'} \times z'\right)\ (2\pi)\ = \arg(z)\ (2\pi)$$

On en déduit : $\boxed{\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ \ (2\pi)}$

Partie B

1. Étude de quelques cas particuliers.

   a) Les points invariants par f sont les points dont l'affixe vérifie $(E) : z' = z$.

   $$(E) \Leftrightarrow z = \frac{\mathrm{i}z+3}{z+\mathrm{i}} \Leftrightarrow z^2 + \mathrm{i}z = \mathrm{i}z + 3 \Leftrightarrow z^2 = 3 \Leftrightarrow z = -\sqrt{3} \text{ ou } z = \sqrt{3}$$

   f admet deux points invariants : les points J et K d'affixes $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

   Le centre I du cercle de diamètre $[AB]$ a pour affixe : $z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = \mathrm{i}$.
   Le rayon de ce cercle est $|z_B - z_I| = |3\mathrm{i} - \mathrm{i}| = |2\mathrm{i}| = 2$.
   $IJ = |z_J - z_I| = \left|-\sqrt{3} - \mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$. De même $IK = 2$.
   On en déduit que **J et K appartiennent au cercle de diamètre $[AB]$.**

   b) L'affixe c' de C' vérifie :

   $$c' = \frac{\mathrm{i}(-2+\mathrm{i})+3}{-2+\mathrm{i}+\mathrm{i}} = \frac{2-2\mathrm{i}}{-2+2\mathrm{i}} = -1 \in \mathbb{R}$$

   donc **le point C' appartient à l'axe des abscisses.**

2. Pour tout point M du plan distinct de A et B :

   $$\arg\left(z'\right) = \arg\left(\frac{\mathrm{i}z+3}{z+\mathrm{i}}\right)\ (2\pi)\ = \arg\left(\frac{\mathrm{i}(z-3\mathrm{i})}{z+\mathrm{i}}\right)\ (2\pi)\ = \arg(i) + \arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)\ (2\pi)\ = \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) + \frac{\pi}{2}\quad (2\pi)$$

   Ainsi : $\boxed{\arg\left(z'\right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) + \frac{\pi}{2}\ \ (2\pi).}$

3. a)

   $$z' \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} z' = 0 \\ \text{ou} \\ \arg(z') = \frac{\pi}{2}\quad (\pi) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} \frac{\mathrm{i}z+3}{z+\mathrm{i}} = 0 \\ \text{ou} \\ \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\quad (\pi) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} z = 3\mathrm{i} \\ \text{ou} \\ \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = 0\quad (\pi) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} M = B \\ \text{ou} \\ M \in (AB) \setminus \{A, B\} \end{array}\right.$$

   Ainsi l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un nombre complexe imaginaire pur est : **la droite (AB) privée de A.**

   b) Si M d'affixe z appartient au cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B alors $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$.
   Ainsi $\arg(z') = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\ (\pi)$ donc $\arg(z') = \pi\ \ (\pi)$. On en déduit : **M' appartient à l'axe des abscisses.**