Devoir surveillé n^o 6

Éléments de correction

Exercice 1

1/ Ω est le milieu de $[AB]$ donc son affixe z_Ω vérifie :

$$z_\Omega = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = \frac{1}{2}(1 - 2\mathrm{i} - 2 + 2\mathrm{i}) = -\frac{1}{2}$$

Le rayon R du cercle vérifie :

$$R = \Omega A = |z_A - z_\Omega| = \left|1 - 2\mathrm{i} + \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{3}{2} - 2\mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

2/

$$z_D = \frac{3+9\mathrm{i}}{4+2\mathrm{i}} = \frac{(3+9\mathrm{i})(4-2\mathrm{i})}{4^2+2^2} = \frac{12 - 6\mathrm{i} + 36\mathrm{i} + 18}{20} = \frac{30+30\mathrm{i}}{20} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$$

De plus :

$$|z_D - z_\Omega| = \left|\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i} + \frac{1}{2}\right| = \left|2 + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = R$$

donc $D \in \mathscr{C}$

3/ a) E est un point du cercle $\mathscr{C}$ donc $|z_E - z_\Omega| = R$ donc $\left|z_E + \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{5}{2}$.

$\arg\left(z_E + \dfrac{1}{2}\right) = \arg(z_E - z_\Omega) \;\; (2\pi) = \left(\vec{u};\overrightarrow{\Omega E}\right) \;\; (2\pi) = \left(\overrightarrow{\Omega I};\overrightarrow{\Omega E}\right) \;\; (2\pi)$ car $\overrightarrow{\Omega I}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires et de même sens.

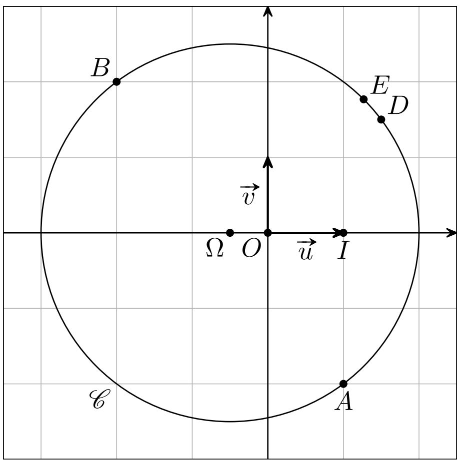
Ainsi : $\arg\left(z_E + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4} \;\; (2\pi)$

b) $z_E + \dfrac{1}{2}$ est donc le nombre complexe de module $\dfrac{5}{2}$ et d'argument $\dfrac{\pi}{4}$.

On peut donc écrire : $z_E + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

On en déduit :

$$z_E = \frac{5}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{5}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}$$



Exercice 2

1/ a) $\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4 \times 4 = 8 - 16 = -8 < 0$

(E) admet donc deux solutions complexes conjuguées :

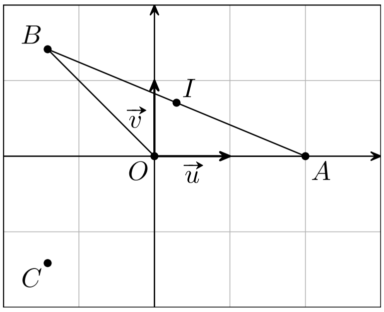
$$z_1 = \frac{-2\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{8}}{2} = \frac{-2\sqrt{2} + 2\mathrm{i}\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = -\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$$

b) $|z_1| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$

Si θ_1 est un argument de z_1 alors $\begin{cases} \cos\theta_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta_1 = \dfrac{3\pi}{4} \ (2\pi)$

On a donc $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

2/ a) Figure :



b) $|z_A| = |z_1| = 2$ donc le triangle OAB est isocèle.

OAB est isocèle en O donc la médiane (OI) est aussi bissectrice de $\widehat{AOB}$.

Ainsi $(\vec{u}; \overrightarrow{OI}) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OI}) \ (2\pi) = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \ (2\pi) = \dfrac{3\pi}{8} \ (2\pi)$

c) I est le milieu de $[AB]$ donc

$$z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

puis

$$|z_I| = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4 - 4\sqrt{2} + 2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{8 - 4\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

d) z_I est le complexe de module $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ et d'argument $\dfrac{3\pi}{8}$ donc :

$$z_I = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \mathrm{i}\sqrt{2 - \sqrt{2}} \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

À l'aide de l'expression de z_I dans la question précédente, on peut donc écrire :

$$\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \mathrm{i}\sqrt{2 - \sqrt{2}} \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On en déduit :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$