Devoir surveillé n° 7

Durée : 1 heure

Exercice 1 (8 points)

1/ Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, d'unité graphique 1 cm on considère les points A, B, C, P et le vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixes respectives :

$$z_A=\frac{3}{2}+6\mathrm{i}\ ;\quad z_B=\frac{3}{2}-6\mathrm{i}\ ;\quad z_C=-3-\frac{1}{4}\mathrm{i}\ ;\quad z_P=3+2\mathrm{i}\ ;\quad z_{\overrightarrow{w}}=-1+\frac{5}{2}\mathrm{i}$$

a) Déterminer l'affixe z_Q du point Q, image du point B dans la translation t de vecteur $\overrightarrow{w}$.

b) Déterminer l'affixe z_R du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.

c) Déterminer l'affixe z_S du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
Placer les points P, Q, R et S.

2/ a) Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

b) Calculer $\dfrac{z_R-z_Q}{z_P-z_Q}$.
En déduire la nature précise du parallélogramme $PQRS$.

c) Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté $\mathscr{C}$. On calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon ρ.

Exercice 2 (6 points)

On considère deux suites (u_n) et (S_n) définies de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0=13 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{5}u_n+\dfrac{4}{5} \quad \forall n\in\mathbb{N}\end{cases} \qquad \text{et} \qquad S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$$

1/ Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n, u_n=1+\dfrac{12}{5^n}$.
En déduire la limite de la suite (u_n).

2/ a) Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).

b) Calculer S_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (S_n).

Exercice 3 (6 points)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+2u_n} \quad \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1/ Calculer u_1 et u_2.

2/ On admet que pour tout entier n, $u_n>0$.
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier n par $v_n=\dfrac{1}{u_n}$.

a) Calculer $v_{n+1}-v_n$ pour tout entier n. Que peut- on en déduire pour la suite (v_n) ?

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) Déduire de la question précédente l'expression de u_n en fonction de n.