Devoir surveillé n^{o} 7

Éléments de correction

Exercice 1

1/ a) $z_Q = z_B + z_{\overrightarrow{w}} = \dfrac{3}{2} - 6\mathrm{i} - 1 + \dfrac{5}{2}\mathrm{i} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{2}\mathrm{i}$

b) $z_R - z_C = -\dfrac{1}{3}(z_P - z_C)$ donc

$z_R = -\dfrac{1}{3}\left(3 + 2\mathrm{i} + 3 + \dfrac{1}{4}\mathrm{i}\right) - 3 - \dfrac{1}{4}\mathrm{i} = -2 - \dfrac{3}{4}\mathrm{i} - 3 - \dfrac{1}{4}\mathrm{i} = -5 - \mathrm{i}$

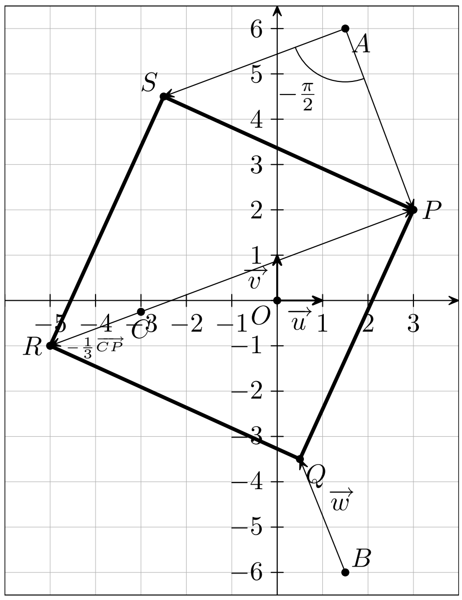
c) $z_S - z_A = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z_P - z_A)$ donc

$z_S = -\mathrm{i}\left(3 + 2\mathrm{i} - \dfrac{3}{2} - 6\mathrm{i}\right) + \dfrac{3}{2} + 6\mathrm{i} = -\mathrm{i}\left(\dfrac{3}{2} - 4\mathrm{i}\right) + \dfrac{3}{2} + 6\mathrm{i} = -\dfrac{3}{2}\mathrm{i} - 4 + \dfrac{3}{2} + 6\mathrm{i} = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{9}{2}\mathrm{i}$

2/ a) $z_{\overrightarrow{PQ}} = z_Q - z_P = \dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{2}\mathrm{i} - 3 - 2\mathrm{i} = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{11}{2}\mathrm{i}$

$z_{\overrightarrow{SR}} = z_R - z_S = -5 - \mathrm{i} + \dfrac{5}{2} - \dfrac{9}{2}\mathrm{i} = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{11}{2}\mathrm{i}$

Ainsi $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ donc $PQRS$ est un parallélogramme.



b) $\dfrac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = \dfrac{-5 - \mathrm{i} - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}\mathrm{i}}{\frac{5}{2} + \frac{11}{2}\mathrm{i}} = \dfrac{-\frac{11}{2} + \frac{5}{2}\mathrm{i}}{\frac{5}{2} + \frac{11}{2}\mathrm{i}} = \mathrm{i}$

On a donc $\dfrac{QR}{QP} = |\mathrm{i}| = 1$ et $\left(\overrightarrow{QP}; \overrightarrow{QR}\right) = \arg \mathrm{i} + 2k\pi = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

$PQRS$ est donc un carré.

c) $PQRS$ est un carré donc P, Q, R et S appartiennent au cercle dont le centre est le centre Ω de $PQRS$ et dont le rayon est $\rho = \dfrac{PR}{2}$.

$z_\Omega = \dfrac{z_P + z_R}{2} = \dfrac{3 + 2\mathrm{i} - 5 - \mathrm{i}}{2} = -1 + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

$\rho = \dfrac{|z_P - z_R|}{2} = \dfrac{|3 + 2\mathrm{i} + 5 + \mathrm{i}|}{2} = \dfrac{\sqrt{73}}{2}$

Exercice 2

1/ – Initialisation :

$1 + \dfrac{12}{5^0} = 1 + 12 = 13 = u_0$. L'égalité est vraie pour $n = 0$.

– Hérédité :

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons l'égalité vraie au rang k, c'est-à-dire $u_k = 1 + \dfrac{12}{5^k}$

On a alors : $u_{k+1} = \dfrac{1}{5}u_k + \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5}\left(1 + \dfrac{12}{5^k}\right) + \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{12}{5^{k+1}} + \dfrac{4}{5} = 1 + \dfrac{12}{5^{k+1}}$

L'égalité est donc vraie au rang $k + 1$.

– Conclusion :

Pour tout entier naturel $n, u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$ (car $5 > 1$) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{12}{5^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

2/ a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$.

La suite (S_n) est donc strictement croissante.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} 1 + \frac{12}{5^k} = \sum_{k=0}^{n} 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{12}{5^k} = n + 1 + 12 \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^k$$

$$= n + 1 + 12 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} = n + 1 + 12 \times \frac{5}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$$

$$= n + 1 + 15 - 15\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = n + 16 - \frac{3}{5^n}$$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} n + 16 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{5^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

Exercice 3

1/ $u_1 = \dfrac{u_0}{1 + 2u_0} = \dfrac{1}{1+2} = \dfrac{1}{3}$ et $u_2 = \dfrac{u_1}{1 + 2u_1} = \dfrac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3+2} = \dfrac{1}{5}$.

2/ a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1 + 2u_n}{u_n} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{2u_n}{u_n} = 2$.

La suite (v_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0} = 1$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + nr = 1 + 2n$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{2n+1}$.