Devoir surveillé n° 2

Durée : 2 heures

Exercice 1 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,3]$ par :

$$f(x) = x\sqrt{3x - x^2}$$

Étudier la dérivabilité de f sur $[0\,;\,3]$ (on ne demande pas l'expression de la dérivée).

Exercice 2 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 1}$$

1/ Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier les variations de f.

2/ Démontrer que f admet un minimum m et maximum M sur $\mathbb{R}$ tels que $m + M = 1$.

Exercice 3 (6 points)

Partie A

1/ Démontrer que pour tout réel x :

$$4(x^2 + 3) \geqslant (x + 3)^2$$

2/ En déduire que pour tout réel x :

$$2\sqrt{x^2 + 3} - x - 3 \geqslant 0$$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\[2mm] \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1/ Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2/ Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3/ Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 1$.

4/ Démontrer que f est dérivable en 1 et préciser la valeur de $f'(1)$.

5/ En utilisant la partie A, dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (8 points)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 + x^2 - 4$$

1/ Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

2/ Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$. On notera α cette solution.

3/ Dresser le tableau de signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x + 2}{x^2 + 1}$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1/ a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

b) Démontrer que la droite d d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$.

c) Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et d.

2/ a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et démontrer que pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{(x-1)g(x)}{(x^2+1)^2}$$

b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$. On donnera une valeur approchée de $f(\alpha)$.

c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.

3/ Faire une figure donnant l'allure de $\mathscr{C}_f$ en y faisant apparaître toutes les propriétés mises en évidence dans l'exercice.