Devoir surveillé n° 2

Terminale 7 S - 2010/2011

15 octobre 2010 – Durée : 1 heure

Exercice 1 — 7 points

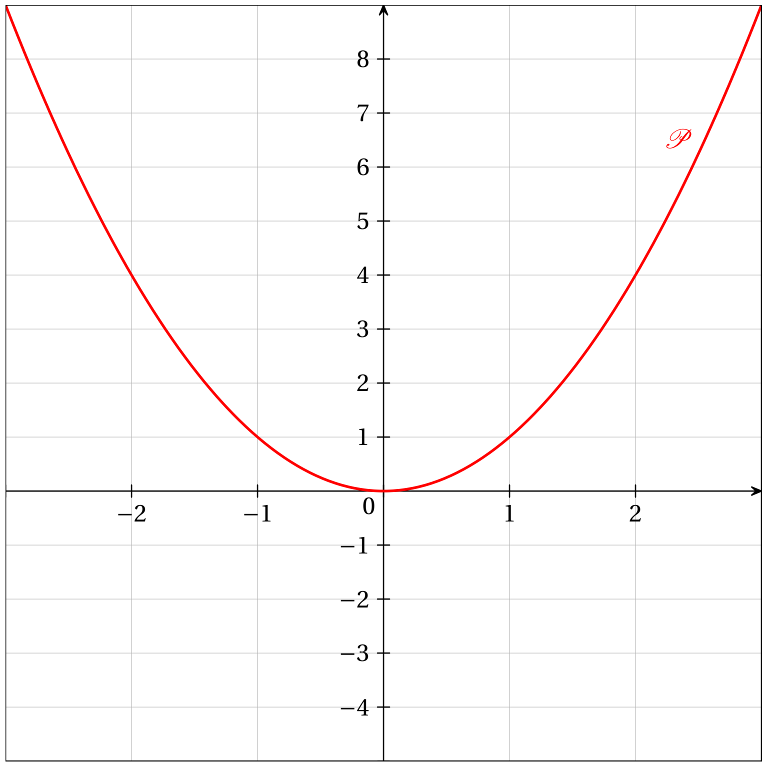
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 4x^2 + 4x}$$

1. Démontrer que l'ensemble de définition de f est $[0\,;+\infty[$.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que f est dérivable sur $]0\,;2[\cup]2\,;+\infty[$.
4. On admet que f n'est pas dérivable en 0. Étudier la dérivabilité de f en 2.
5. Étudier les variations de f.

Exercice 2 — 13 points

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x + 1$$
   a) Calculer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
   b) Étudier les variations de g.
   c) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   d) Déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de x.
2. Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \frac{-x^3 + x^2 + 1}{1 - x}$$
   On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
   a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
   b) Calculer les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}_f$. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}_f$?
   c) Étudier les variations de f.
3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = x^2$$
   On appelle $\mathscr{P}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - h(x)$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - h(x)$. Interpréter graphiquement ces résultats.
   b) Étudier le signe de $f(x) - h(x)$ sur $\mathscr{D}_f$. Interpréter graphiquement ce résultat.
4. Calculer $f(0)$ et $f'(0)$.
5. Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$ dans le repère ci-dessous en prenant en compte l'ensemble des résultats obtenus dans l'exercice.



$\mathscr{P}$
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−2
−1
1
2
−1
−2
−3
−4