Devoir surveillé n^o 2
Terminale 7 S - 2010/2011
Éléments de correction

Exercice 1

1. $x \in \mathscr{D}_f \Leftrightarrow x^3-4x^2+4x \geqslant 0 \Leftrightarrow x(x^2-4x+4) \geqslant 0 \Leftrightarrow x(x-2)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$. Ainsi $\boxed{\mathscr{D}_f = [0\,;+\infty[.}$

2. $\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3-4x^2+4x=+\infty\\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.}$

3.
   - La fonction $x \mapsto x^3-4x^2+4x$ est dérivable sur $]0\,;2[\cup]2\,;+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ (car $x(x-2)^2$ s'annule en 0 et en 2).
   - La fonction $X \mapsto \sqrt{X}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   Par composée, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est donc dérivable sur }]0\,;2[\cup]2\,;+\infty[.}$

4. $\forall h \neq 0$, tel que $2+h \in \mathscr{D}_f$:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{\sqrt{(2+h)(2+h-2)^2}-0}{h} = \frac{\sqrt{h^2(2+h)}}{h} = \frac{\sqrt{h^2}\sqrt{2+h}}{h}$$

   Pour $h>0$, $\displaystyle\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{h\sqrt{h+2}}{h} = \sqrt{h+2}$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0\\ >}} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \sqrt{2}$

   Pour $h<0$, $\displaystyle\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{-h\sqrt{h+2}}{h} = -\sqrt{h+2}$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0\\ <}} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = -\sqrt{2}$

   Conclusion : $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 2.}$

5. $\forall x \in]0\,;2[\cup]2\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{3x^2-8x+4}{2\sqrt{x^3-4x^2+4x}}$ qui est du signe de $3x^2-8x+4$ sur $]0\,;2[\cup]2\,;+\infty[$.

   Les racines (à calculer...) de $3x^2-8x+4$ sont $\dfrac{2}{3}$ et 2. On obtient donc le tableau suivant :

x	0		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	+	0	−	||	+	
Variations de f	0	↗	$\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$	↘	0	↗	$+\infty$

Exercice 2

1. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.}$

   b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 6x^2 - 8x + 2$.

   Les racines de g' sont $\dfrac{1}{3}$ et 1. On obtient donc le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{35}{27}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

   c) i. Sur $\left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$, le minimum de g est 1 donc g n'a pas de racine sur cet intervalle.

   ii.
   - g est continue sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right]$ car c'est un polynôme.
   - g est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right]$.
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$
   - $g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{35}{27}$

   $0 \in \left]-\infty\,;\frac{35}{27}\right]$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans $\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right]$.

   iii. Conclusion : $\boxed{\text{L'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ dans } \mathbb{R}.}$

   À la calculatrice, on obtient : $\boxed{-0{,}3 < \alpha < -0{,}29}$

   d) Le signe de $g(x)$ est donné grâce au tableau suivant :

x	$-\infty$		α		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{35}{27}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0			$+$			

2. a) $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.}$

   b)
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^3}{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^3}{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.}$
   - $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} -x^3 + x^2 + 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} 1 - x = 0^- \end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = -\infty}$

- $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} -x^3+x^2+1=1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} 1-x=0^+\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)=+\infty}$

$\boxed{\text{La droite d'équation } x=1 \text{ est asymptote à } \mathscr{C}_f.}$

c) f est dérivable sur son ensemble de définition car c'est une fonction rationnelle.
$\forall x \in \mathscr{D}_f$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-3x^2+2x)(1-x)-(-x^3+x^2+1)\times(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-3x^2+3x^3+2x-2x^2-x^3+x^2+1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2x^3-4x^2+2x+1}{(1-x)^2} = \frac{g(x)}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

$f'(x)$ est donc du signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
On obtient ainsi le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. a) $\forall x \in \mathscr{D}_f$,

$$f(x)-h(x) = \frac{-x^3+x^2+1}{1-x}-x^2 = \frac{-x^3+x^2+1-x^2(1-x)}{1-x} = \frac{-x^3+x^2+1-x^2+x^3}{(1-x)} = \frac{1}{1-x}$$

On a donc :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{-x}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-h(x)=0}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{-x}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-h(x)=0}$

On en déduit que $\boxed{\text{les courbes } \mathscr{C}_f \text{ et } \mathscr{P} \text{ sont asymptotes en } +\infty \text{ et en } -\infty.}$

b) D'après le calcul précédent, le signe de $f(x)-h(x)$ est celui de $1-x$ sur $\mathscr{D}_f$. On obtient le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f(x)-h(x)$		$+$	||	$-$	

On en déduit que :
$\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est « au dessus » de } \mathscr{P} \text{ sur }]-\infty;1[\text{ et que } \mathscr{C}_f \text{ est « en dessous » de } \mathscr{P} \text{ sur }]1;+\infty[.}$

4. $\boxed{f(0)=1}$ et $\boxed{f'(0)=1}$. On en déduit que $\mathscr{C}_f$ passe par le point $(0;1)$ et qu'en ce point elle possède une tangente de coefficient directeur 1.

5. Graphique :