# Devoir surveillé n° 3

Durée : 2 heures

## Exercice 1 (3 points)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{|x|+1}$$

Répondre par VRAI ou FAUX aux propositions suivantes **en justifiant la réponse**.

1/ $f$ est impaire.

2/ $f$ est dérivable en 0.

3/ La droite d'équation $y = -1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

## Exercice 2 (3 points)

Rappel : Pour tout réel $t$, $E(t)$ désigne la partie entière de $t$.

1/ Démontrer que, pour tout réel $t$ : $t-1 < E(t) \leqslant t$

2/ Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} xE\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Démontrer que $f$ est continue en 0.

b) Étudier la dérivabilité de $f$ en 0.

## Exercice 3 (4 points)

Soit $f$ la fonction définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$$

1/ On appelle $g$ la fonction définie sur $I$ par $g(x) = \tan x - x$.

a) Déterminer les limites de $g$ aux bornes de $I$.

b) Étudier les variations de $g$.

c) Calculer $g(0)$ et déterminer le signe de $g(x)$ sur $I$.

2/ a) Justifier que $f$ est dérivable sur $I$ et calculer $f'$.

b) Factoriser $f'(x)$ pour tout $x$ de $I$ puis, en utilisant la question 1, déterminer le signe de $f'(x)$ sur $I$.

c) Déterminer les variations de $f$ sur $I$. En déduire le signe de $f$ sur $I$.

## Exercice 4 (2 points)

Calculer la primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition donnée :

1/ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$, $F(0) = -1$

2/ $f(x) = (2x+1)(x^2+x-5)^5$, $F(2) = 1$

## Exercice 5 (2 points)

Résoudre les équations suivantes :

$(E_1)$ : $\ln(x-3) + \ln(x-5) = \ln(2x-1)$ $(E_2)$ : $(\ln x)^2 + \ln x = 6$

## Exercice 6 (6 points)

**Partie A**

Soit $g$ la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$$

1/ Étudier le sens de variation de $g$.

2/ a) Calculer $g(1)$ et $g(2)$

b) Prouver que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique $\alpha$ dans $]0;+\infty[$.

c) Déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.

3/ Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

**Partie B**

Soit $f$ la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x^2 + x}$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1/ Étudier les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$.
Interpréter graphiquement ces limites.

2/ a) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$.

b) Justifier que $f$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et démontrer que, pour tout $x > 0$ :

$$f'(x) = \frac{2(2x+1)g(x)}{(x^2+x)^2}$$

c) Dresser le tableau de variation de $f$