Devoir surveillé n° 3

Éléments de correction

Exercice 1

1/ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \dfrac{-x}{|-x|+1} = -\dfrac{x}{|x|+1} = -f(x)$ donc f est impaire.

2/ $\forall h \neq 0,\ \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{1}{|h|+1}$ donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

3/ $\forall x < 0,\ f(x) = \dfrac{x}{-x+1}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{-x} = -1$ donc la droite d'équation $y = -1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$

Exercice 2

1/ La définition de E donne : $E(t) \leqslant t < E(t)+1$. On a donc immédiatement l'une des inégalités. L'autre s'obtient en retranchant 1.

2/ a) $\forall x \neq 0,\ \dfrac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \dfrac{1}{x}$

ainsi $\forall x > 0,\ 1 - x < xE\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$ et $\forall x < 0,\ 1 - x > xE\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant 1$

Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0.

b) Difficile !

$\forall h \neq 0,\ \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{hE\left(\frac{1}{h}\right)-1}{h} = E\left(\frac{1}{h}\right) - \dfrac{1}{h}$

Si la limite lorsque h tend vers 0 de l'expression précédente existe, elle sera égale à la limite en $+\infty$ (et en $-\infty$) de $g(x) = E(x) - x$. Or g n'a pas de limite en $+\infty$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = 0$ et $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} n+1} g(x) = -1$.

La fonction f n'est donc pas dérivable en 0.

Exercice 3

1/ a) On a $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$.

De même, $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} \frac{-\pi}{2}} f(x) = -\infty$.

b) g est dérivable sur I car c'est une somme de fonctions dérivables.

$\forall x \in I,\ g'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x \geqslant 0$ (l'égalité ne se produit que pour $x = 0$) donc g est strictement croissante sur I.

c) $g(0) = 0$ donc $g(x) < 0$ pour $x < 0$ et $g(x) > 0$ pour $x > 0$.

2/ a) f est dérivable sur I car c'est une somme de fonctions dérivables.

$\forall x \in I,\ f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2$

b) $\forall x \in I,\ f'(x) = (\tan x - x)(\tan x + x)$.

En remarquant que pour $x > 0$, $\tan x + x > 0$ et que pour $x < 0$, $\tan x + x < 0$ et en utilisant la question 1, on obtient les tableaux suivants :

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
Signe de $\tan x - x$	||	$-$	0	$+$	||
Signe de $\tan x + x$	||	$-$	0	$+$	||
Signe de $f'(x)$	||	$+$	0	$+$	||

c) On en déduit :

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
Variations de f	‖		$\nearrow$		‖
Signe de $f(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖

Exercice 4

1/ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3x^2+1}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \dfrac{1}{3}\sqrt{3x^2+1} + C$. La condition initiale donne $C = -\dfrac{4}{3}$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \dfrac{1}{3}\sqrt{3x^2+1} - \dfrac{4}{3}$

2/ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (2x+1)(x^2+x-5)^5$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \dfrac{1}{6}(x^2+x-5)^6 + C$. La condition initiale donne $C = \dfrac{5}{6}$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \dfrac{1}{6}(x^2+x-5)^6 + \dfrac{5}{6}$

Exercice 5

Domaine de validité de (E_1) : $]5\ ;\ +\infty[$

$\forall x \in\ ]5\ ;\ +\infty[$,

$$(E_1) \Leftrightarrow \ln(x-3)(x-5) = \ln(2x-1) \Leftrightarrow (x-3)(x-5) = (2x-1) \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$$

Cette équation a pour solutions 8 et 2 dans $\mathbb{R}$.

Conclusion : $\mathscr{S}_1 = \{8\}$.

Domaine de validité de (E_2) : $]0\ ;\ +\infty[$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} X = \ln x \\ X^2 + X - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \ln x \\ X = 2 \text{ ou } X = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \ln x = 2 \text{ ou } \ln x = -3$$

$$\Leftrightarrow x = e^2 \text{ ou } x = \frac{1}{e^3}$$

Conclusion : $\mathscr{S}_2 = \left\{e^2 ; \dfrac{1}{e^3}\right\}$.

Exercice 6

Partie A

1/ g est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ (quotient et somme de fonctions dérivables) et pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1 \times (2x+1) - 2 \times (x+1)}{(2x+1)^2} - \frac{1}{x} = \frac{-1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{x}$$

$\forall x \in\ ]0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2/ a) $g(1) = \dfrac{2}{3}$ et $g(2) = \dfrac{3}{5} - \ln 2$

b) 2 méthodes :
- On utilise le théorème de la bijection sur $]0\ ;\ +\infty[$ mais il faut d'abord calculer les limites de g en 0 ($+\infty$) et en $+\infty$ ($-\infty$).
- On utilise le théorème de la bijection sur $[1; 2]$ après avoir remarqué que $g(1) > 0$ et $g(2) < 0$ et on utilse la décroissance de g sur $]0\ ;\ 1]$ et $[2\ ;\ +\infty[$.

c) À la calculatrice, on obtient $1{,}83 < \alpha < 1{,}84$

3/ Des questions précédentes, on déduit :
- $\forall x \in \left]0\ ;\ \alpha\right[$, $g(x) > 0$;
- $\forall x \in \left]\alpha\ ;\ +\infty\right[$, $g(x) < 0$.

Partie B

1/ $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2 + x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

$\forall x \in \left]0\ ;\ +\infty\right[$, $f(x) = 2 \times \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{1}{x+1}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$ sont asymptotes à $\mathscr{C}_f$.

2/ a)

$$\begin{aligned} f(\alpha) - \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)} &= \frac{2\ln\alpha}{\alpha^2+\alpha} - \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)} = \frac{2}{\alpha} \times \left(\frac{\ln\alpha}{\alpha+1} - \frac{1}{2\alpha+1}\right) \\ &= \frac{2}{\alpha(\alpha+1)} \times \left(\ln\alpha - \frac{\alpha+1}{2\alpha+1}\right) = 0 \end{aligned}$$

donc $f(\alpha) = \dfrac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$

b) f est dérivable sur $\left]0\ ;\ +\infty\right[$ (quotient de fonctions dérivables) et, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = 2 \times \frac{\frac{1}{x}(x^2+x) - (2x+1)\ln(x)}{(x^2+x)^2} = 2 \times \frac{x+1-(2x+1)\ln(x)}{(x^2+x)^2} = \frac{2(2x+1)g(x)}{(x^2+x)^2}$$

c) Le signe de f' est le signe de g sur $\left]0\ ;\ +\infty\right[$. On obtient donc le tableau suivant :

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
Variations de f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0