Durée : 4 heures — Semaine du 2 au 6 mars 2009

Bac Blanc

Mathématiques Obligatoire

La calculatrice est autorisée

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On pourra se servir du repère en annexe.
Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1. (a) Déterminer l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.
   (b) Déterminer l'affixe du point B' image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
   Placer les points A, B et B'.
2. On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que
$$z' = (1+\mathrm{i})z + 1$$
   (a) Montrer que B a pour image B' par f.
   (b) Montrer que A est le seul point invariant par f.
   (c) Etablir que pour tout nombre complexe z distinct de i,
$$\frac{z'-z}{\mathrm{i}-z} = -\mathrm{i}$$
   Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles. En déduire une méthode de construction de M' à partir de M, pour M distinct de A.
3. (a) Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z-2| = \sqrt{2}$.
   (b) Démontrer que $z' - 3 - 2\mathrm{i} = (1+\mathrm{i})(z-2)$.
   En déduire que si le point M appartient à Σ_1, alors son image M' par f appartient à un cercle Σ_2, dont on précisera le centre et le rayon.
   (c) Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A, B et B'.

Exercice 2 (4 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1 \quad \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. (a) Étudier la dérivabilité de f en 0.
   (b) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$, f' désignant la fonction dérivée de f.
3. Étudier le sens de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$, puis dresser son tableau de variations.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 3 (4 points)

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $D = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$:

$$(E) \quad y' + (1 + 2\tan x)y = \cos^2 x \qquad \text{et} \qquad (E_0) \; : \; y' + y = 1.$$

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0).
2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur D et telles que
$$f(x) = g(x)\cos^2 x.$$
Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E_0).
3. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$$

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Cette courbe est donnée en annexe.

Partie A

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
2. (a) Montrer que, pour tout réel m de $\left]0\,;\,\frac{1}{\mathrm{e}}\right[$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.
   (b) Dans le cas où $m = \frac{1}{4}$, on nomme α et β les solutions de l'équation précédente (avec $\alpha < \beta$).
   Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   Placer α et β sur l'annexe de l'exercice.
   (c) Résoudre l'équation $f(x) = m$ dans le cas où $m = 0$ et $m = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n\mathrm{e}^{-u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

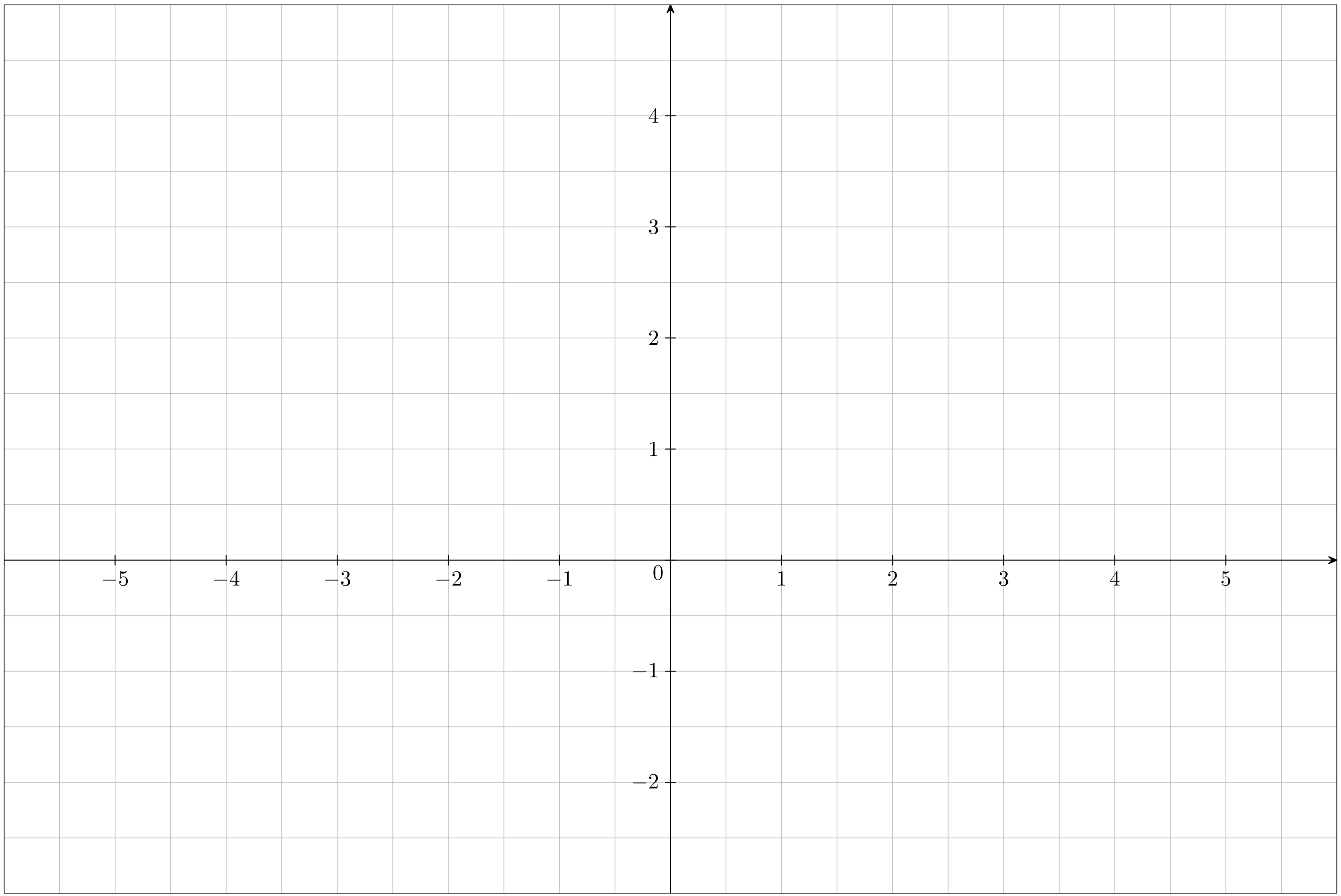
où α est le réel défini à la question **A.2b**

   (a) Représenter sur l'annexe les 3 premiers termes de la suite (u_n).
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (d) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

2. On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln u_n$.
   (a) Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $u_n = w_n - w_{n+1}$.
   (b) On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   Montrer que $S_n = w_0 - w_{n+1}$.
   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme v_0 ($v_0 > 0$) et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n\mathrm{e}^{-v_n}$.
Existe-t-il une valeur de v_0 différente de α telle que, pour tout $n \geqslant 1$, on ait $u_n = v_n$?
Si oui, préciser laquelle.

Annexe de l'exercice 1



Annexe de l'exercice 4