Devoir surveillé n° 7

Éléments de correction

Exercice 1

Partie A

1/ a) La fonction est une différence de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$, elle est donc dérivable et, pour tout x de cet intervalle :

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$ qui est du signe du numérateur puisque $x > 0$.

$f'(x) = 0 \iff \sqrt{x} = 2 \iff x = 4$;

$f'(x) < 0 \iff 0 < x < 4$; $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]0\,;4[.}$

$f'(x) > 0 \iff x > 4$; $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]4\,;+\infty[.}$

Il en résulte que $\boxed{f \text{ a un minimum pour } x = 4}$ et $f(4) = \sqrt{4} - \ln 42 - 2\ln 2 \approx 0{,}62$.

b) Le minimum de f étant supérieur à zéro, $f(x) > 0$ quel que soit $x \in]0\,;+\infty[$.

Ainsi $\forall x \in]1\,;+\infty[$, $\sqrt{x} - \ln x > 0$ donc $\ln x < \sqrt{x}$ soit $\dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ car $x > 0$.

De plus pour $x > 1$, $\ln x > 0$ donc :

$$\boxed{\forall x > 1 : 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}}$$

c) Comme $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$, on obtient par application du théorème des « gendarmes » que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0.}$

2/ Pour tout $x > 0$, $x \ln x = -\dfrac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0 \end{array}\right\} \text{donc } \boxed{\lim_{x\to 0} x\ln x = 0.}$$

Partie B

1/ a) D'après les formules de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1.}$

b) Pour tout $x \in]0\,;1]$, $\ln x \leqslant 0$ donc $x\ln x \leqslant 0$ et $1 + x\ln x \leqslant 1$. Ainsi $\boxed{f(x) \leqslant 1}$

2/ a) f est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables sur $]0\,;1]$.

Pour tout $x \in]0\,;1]$, $f'(x) = 0 + 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = 1 + \ln x$; $\boxed{f'(x) = 1 + \ln x.}$

b) L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ en 1 est : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$; $f'(1) = 1$ et $f(1) = 1$.

Cette équation est donc : $y = (x-1) + 1$ soit : $y = x$.

$\boxed{\text{Cette tangente est donc } T.}$

3/ a) g est dérivable sur $]0\,;1]$ comme somme de fonctions dérivables.

Pour tout $x \in]0\,;1]$, $g(x) = f(x) - x$ donc $g'(x) = f'(x) - 1 = \ln x$.

Pour tout $x \in]0\,;1]$, $\ln x \leqslant 0$ donc $g'(x) \leqslant 0$. On en déduit que $\boxed{g \text{ est décroissante sur }]0\,;1].}$

b) Or $g(1) = 0$.
Par conséquent, $g(x) \geqslant 0$ sur $]0\,;1]$.
On en déduit que $\boxed{\mathcal{C} \text{ est au-dessus de } T \text{ sur }]0\,;1].}$

Exercice 2

1/ $z_0 = 2$, $z_1 = 1 + \mathrm{i}$, $z_2 = \mathrm{i}$, $z_3 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{i}}{2}$, $z_4 = -\dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}$.

2/ On a $u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n\right| = \left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right| \times |z_n| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} u_n$.

L'égalité $u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} u_n$ montre que la suite $\boxed{(u_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \dfrac{1}{\sqrt{2}}.}$

On a $u_0 = |z_0| = |2| = 2$. On sait que $u_n = u_0 \times \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$. Finalement :

$$\boxed{u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}$$

3/ On a $OA_n = |z_n| = u_n$, donc A_n appartient au disque (fermé) de centre O et de rayon 0,1 si et seulement si $u_n \leqslant 0{,}1 \iff 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leqslant 0{,}1 \iff 20 \leqslant \left(\sqrt{2}\right)^n \iff 20 \leqslant 2^{\frac{n}{2}} \iff \dfrac{n}{2} \ln 2 \geqslant \ln 20 \iff n \geqslant \dfrac{2 \ln 20}{\ln 2} \approx 8{,}6$.

La condition sera donc réalisée la première fois par u_9. On a donc $\boxed{n_0 = 9.}$

4/ a) Pour tout naturel n, $u_n \neq 0$ donc $z_n \neq 0$.

On peut donc écrire $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \dfrac{\dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n - z_n}{\dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n} = \dfrac{1 + \mathrm{i} - 2}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}} \boxed{= \mathrm{i}}$.

L'interprétation géométrique de cette égalité est :

– $\left(\overrightarrow{OA_{n+1}}, \overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$.
  Conclusion : pour tout naturel n le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

– En modules l'égalité donne $\dfrac{A_nA_{n+1}}{OA_{n+1}} = 1 \iff A_nA_{n+1} = OA_{n+1}$.
  Conclusion le triangle OA_nA_{n+1} est isocèle en A_{n+1}.
  Finalement pour tout naturel n, le triangle $\boxed{OA_nA_{n+1} \text{ est rectangle isocèle en } A_{n+1}.}$

b) Comme les triangles sont isocèles : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n = OA_1 + OA_2 + \cdots + OA_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

Cette somme est la somme de n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $u_1 = \sqrt{2}$ et de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

On a donc $\ell_n = \sqrt{2}\dfrac{1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}^n}}{1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}} = 2 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\sqrt{2} - 1}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$, on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \ell_n = \frac{2}{\sqrt{2} - 1}}$$

Exercice 3

1/ a) On a $u_1 = -\dfrac{1}{2}$, $u_2 = -\dfrac{1}{4}$ et $u_3 = \dfrac{7}{8}$.

b) Initialisation : $u_3 = \dfrac{7}{8} \geqslant 0$ donc la relation est vraie au rang 3.

Hérédité : Soit $p \geqslant 3$. Supposons que $u_p \geqslant 0$.

On a : $u_{p+1} = \dfrac{1}{2}u_p + p - 1$. Or $p \geqslant 3$ donc $p - 1 \geqslant 2$, donc $u_{p+1} \geqslant 2 \geqslant 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 3,\ u_n \geqslant 0.}$

c) $\forall n \geqslant 4$, $n - 1 \geqslant 3$ donc $u_{n-1} \geqslant 0$.

Ainsi, $\forall n \geqslant 4$, $\boxed{u_n = \dfrac{1}{2}u_{n-1} + n - 2 \geqslant n - 2.}$

d) Par comparaison, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$

2/ a) $v_n = 4u_n - 8n + 24 \Rightarrow v_{n+1} = 4u_{n+1} - 8(n+1) + 24 = 4\left(\dfrac{1}{2}u_n + n - 1\right) - 8(n+1) - 1 =$
$2u_n + 4n - 4 - 8n - 8 + 24 = 2u_n - 4n + 12 = \dfrac{1}{2}(4u_n - 8n + 24) = \dfrac{1}{2}v_n$.

On a donc démontré que $\boxed{(v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \dfrac{1}{2}}$. La raison étant inférieure à 1 et le premier terme positif ($v_0 = 4u_0 + 24 = 28 > 0$), $\boxed{\text{cette suite est décroissante.}}$

b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 28 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

On en déduit : $v_n = 4u_n - 8n + 24$ donc $4u_n = 28 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 8n - 24$ puis

$$\boxed{u_n = 7 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 2n + 6.}$$

c) On a donc $u_n = \underbrace{7 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}_{\text{suite géométrique}} + \underbrace{-2n + 6}_{\text{suite arithmétique}} = x_n + y_n$ où (x_n) est la suite (v_n) au facteur 4 près et la suite (y_n) est définie par $y_n = -2n + 6$, suite arithmétique de raison -2 et de premier terme 6.

d) On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=0}^{n} x_k + \sum_{k=0}^{n} y_k$.

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k = \dfrac{7 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 14\left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 14 - 7 \times \left(\dfrac{1}{2}^n\right)$.

D'autre part $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} y_k = -6(n+1) + 2\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right) = -6n - 6 + n(n+1) = -6n - 6 + n^2 + n =$ $n^2 - 5n - 6$.

Finalement $\boxed{S_n = n^2 - 5n + 8 - 7\left(\dfrac{1}{2}\right)^n.}$

Exercice 4

1/ Soit f dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$ et soit g définie par $g = \ln f$.

$$g' = \frac{1}{20}g - \frac{3}{20} \iff \frac{f'}{f} = \frac{1}{20}\ln f - \frac{3}{20} \iff \frac{f'}{f} = -\frac{1}{20}(3-\ln f) \iff f' = -\frac{1}{20}f(3-\ln f)$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad f'(t) = -\frac{1}{20}f(3-\ln(f(t))) \iff \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad g'(t) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}}$$

2/ Les solutions de (H) sont les fonctions $t \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} - \dfrac{-\frac{3}{20}}{\frac{1}{20}}$, avec $C \in \mathbb{R}$. Autrement dit les solutions de (H) sont les fonctions g définies par $\boxed{g(t) = 3 + C\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.}$

3/ f est solution de $(E) \iff \ln f$ est solution de $(H) \iff \ln f = 3 + C\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}$, avec $C \in \mathbb{R}$.
Les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions f telles que :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad f(t) = \exp\left(3 + C\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}\right), \quad C \in \mathbb{R}}$$

4/ Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = \exp\left(3 - 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}\right)$.

a) $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{t}{20}} = +\infty$ (composée), donc $\lim\limits_{t\to+\infty} -3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} = -\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 - 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} = -\infty$.

On a $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 3 - 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} \exp(X) = 0\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0.}$

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ en tant que composée de fonctions dérivables et :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad f'(t) = -\frac{3}{20}\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}\exp\left(3 - 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}\right) < 0$$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc strictement décroissante sur } [0\,;+\infty[.}$

c)

$$\begin{aligned}
f(t) < 0{,}02 &\iff \exp\left(3 - 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}\right) < 0{,}02 \\
&\iff 3 - 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} < \ln 0{,}02 \text{ car ln est strictement croissante sur }]0\,;+\infty[\\
&\iff 3 - 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} < -\ln 50 \iff 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} > 3 + \ln 50 \iff \mathrm{e}^{\frac{t}{20}} > \frac{3+\ln 50}{3} \\
&\iff \frac{t}{20} > \ln\left(\frac{3+\ln 50}{3}\right) \iff t > 20 \times \ln\left(\frac{3+\ln 50}{3}\right)
\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc $\boxed{S = \left]20\ln\left(\frac{3+\ln 50}{3}\right)\,;+\infty\right[.}$

0,02 millier correspond à 20 individus et $20 \times \ln\left(\dfrac{3+\ln 50}{3}\right) \approx 16{,}6$.

$\boxed{\text{La population sera donc inférieure à 20 individus à partir de la dix-septième année.}}$