Devoir surveillé de mathématiques
Terminales S – Obligatoire

Mercredi 16 décembre 2009
Durée : 2 heures 30

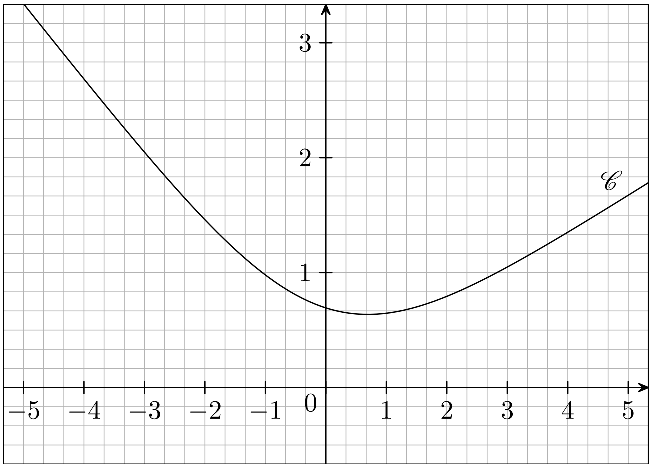
L'usage d'une calculatrice est autorisé.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Le barème est donné à titre indicatif. Il est susceptible d'être modifié.

Exercice 1 — 8 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{1}{3}x$$

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



Partie A

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Montrer que la droite d d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$. Tracer d.
   c. Étudier la position relative de d et de $\mathscr{C}$.
   d. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 1) - \frac{2}{3}x$.
   e. En déduire la limite de f en $-\infty$.
2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 2}{3(\mathrm{e}^x + 1)}$.
   b. En déduire les variations de la fonction f.

Partie B

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe $\mathscr{C}$.
On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de T puis construire T sur le graphique.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Soient M et N deux points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses non nulles et opposées. Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite T.

Exercice 2 **8 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 3 cm).
On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Justifier que f est continue en 0.
2. a. Démontrer que la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$$g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$$
est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
Calculer $g(0)$ et en déduire que pour tout $x \in [0\,;+\infty[$:
$$\ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$
b. Par une étude analogue, montrer que pour tout $x \in [0\,;+\infty[$:
$$\ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$$
c. Établir que pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$:
$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leqslant -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$$
En déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
3. a. Soit h la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$$h(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$$
Étudier les variations de h et en déduire son signe sur $[0\,;+\infty[$.
b. Montrer que pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$:
$$f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$$
c. Dresser le tableau de variation de f en précisant la limite de f en $+\infty$.
d. On désigne par $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans le repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Construire la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 3 **4 points**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 2y = (5x+1)\mathrm{e}^{3x}$$

1. Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{3x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $(H) : y' + 2y = 0$.
3. Démontrer qu'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $g - f$ est solution de (H).
4. Résoudre l'équation (E).
5. Existe-t-il une solution de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(\ln 2\,;40\ln 2)$?