Devoir surveillé de mathématiques

Terminales S – Obligatoire

Mercredi 16 décembre 2009
Éléments de correction

Exercice 1

Partie A

1/ a. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-x} = 1$

Ainsi $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-x}=1\\ \lim\limits_{X\to 1}\ln X = 0\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$.

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3}x = +\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

b. Soit δ définie sur $\mathbb{R}$ par $\delta(x) = f(x) - \frac{1}{3}x$.

Pour tout réel x, $\delta(x) = \ln(1+e^{-x})$ donc, d'après la question précédente, $\lim\limits_{x\to+\infty} \delta(x) = 0$.

$\boxed{\text{La droite } d \text{ est donc asymptote à } \mathscr{C} \text{ en } +\infty.}$

c. La position relative de d et de $\mathscr{C}$ est donnée par le signe de $\delta(x)$.

Or, pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ donc $1+e^{-x} > 1$ donc $\ln(1+e^{-x}) > 0$ (car la fonction ln est croissante).

Ainsi, pour tout réel x, $\delta(x) > 0$. $\boxed{\mathscr{C} \text{ est au dessus de } d.}$

d. Pour tout réel x :

$$f(x) = \ln\left(1+e^{-x}\right) + \frac{1}{3}x = \ln\left(e^{-x}(e^x+1)\right) + \frac{1}{3}x = \ln(e^{-x}) + \ln\left(e^x+1\right) + \frac{1}{3}x$$
$$= -x + \ln\left(e^x+1\right) + \frac{1}{3}x = \ln\left(e^x+1\right) - \frac{2}{3}x$$

Ainsi, pour tout réel x, $\boxed{f(x) = \ln(e^x+1) - \frac{2}{3}x.}$

e. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1 = 1$

Ainsi $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}+1=1\\ \lim\limits_{X\to 1}\ln X = 0\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^x+1) = 0$.

De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{2}{3}x = +\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$

2/ a. $x \mapsto e^x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive donc, par composée, $x \mapsto \ln(e^x+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus $x \mapsto -\frac{2}{3}x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc, par somme $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$

Pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{2}{3} = \frac{3e^x - 2(e^x+1)}{e^x+1} = \boxed{\frac{e^x-2}{3(e^x+1)}}$$

b. $f'(x)$ est du signe de $e^x - 2$ sur $\mathbb{R}$.

- $e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$;
- $e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$ (car ln est croissante).

On obtient donc le tableau suivant :

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de f	$+\infty$ ↘	$\ln 3 - \frac{2}{3}\ln 2$	↗ $+\infty$

Partie B

1/ Le coefficient directeur de T est $f'(0) = \boxed{-\dfrac{1}{6}}$

2/ Soit x l'abscisse de M. On a alors $M\big(x\,;f(x)\big)$ et $N\big(-x\,;f(-x)\big)$.
Soit a le coefficient directeur de (MN). On a :

$$a = \frac{f(x)-f(-x)}{x-(-x)} = \frac{\ln(\mathrm{e}^x+1)-\frac{2}{3}x-(\ln(1+\mathrm{e}^{-(-x)})+\frac{1}{3}(-x))}{2x} = \frac{\ln(\mathrm{e}^x+1)-\frac{2}{3}x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+\frac{1}{3}x}{2x}$$
$$= \frac{-\frac{1}{3}x}{2x} = -\frac{1}{6}$$

$\boxed{\text{Les droites } (MN) \text{ et } T \text{ sont donc parallèles.}}$

Exercice 2

1/ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 = f(0)$ donc $\boxed{f \text{ est continue en } 0.}$

2/ a. g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ (car ...) et, pour tout x de $[0\,;+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x}-(1-x+x^2) = \frac{1-(1-x+x^2)(1+x)}{1+x} = \frac{1-1-x+x+x^2-x^2-x^3}{1+x} = \frac{-x^3}{1+x}$$

Pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $g'(x)\leqslant 0$ donc $\boxed{g \text{ est décroissante sur } [0\,;+\infty[.}$

$g(0)=\ln(1)=0$. Comme g est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, pour tout $x\in[0\,;+\infty[$: $g(x)\leqslant g(0)$.

On a ainsi, pour tout $x\in[0\,;+\infty[$:

$$\ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\leqslant 0$$

soit :

$$\boxed{\ln(1+x)\leqslant x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}} \qquad (1)$$

b. Soit k la fonction définie sur$[0\,;+\infty[$ par :

$$k(x) = \ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$$

k est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ (car ...) et, pour tout x de $[0\,;+\infty[$:

$$k'(x) = \frac{1}{1+x}-(1-x) = \frac{1-(1-x)(1+x)}{1+x} = \frac{1-(1-x^2)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$$

Pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $k'(x)\geqslant 0$ donc $\boxed{k \text{ est croissante sur } [0\,;+\infty[.}$

$k(0)=\ln(1)=0$. Comme k est croissante sur $[0\,;+\infty[$, pour tout $x\in[0\,;+\infty[$: $k(x)\geqslant k(0)$.

On a ainsi, pour tout $x\in[0\,;+\infty[$:

$$\ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\geqslant 0$$

soit :

$$\boxed{\ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}} \qquad (2)$$

c. À l'aide des inégalités 1 et 2, on obtient : pour tout $x \in]0\,;+\infty[$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

soit

$$-\frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) - x \leqslant -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

et donc

$$\boxed{-\frac{1}{2} \leqslant \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \leqslant -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}}$$

Pour tout $h > 0$,

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\frac{\ln(1+h)}{h} - 1}{h} = \frac{\ln(1+h)-h}{h^2}$$

D'après ce qui précède, on a donc, pour tout $h > 0$,

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \leqslant -\frac{1}{2} + \frac{h}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h\to 0} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ \lim\limits_{h\to 0} -\frac{1}{2} + \frac{h}{3} = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \text{donc, d'après le théorème des gendarmes, } \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -\frac{1}{2}.$$

$\boxed{f \text{ est donc dérivable en 0 et que } f'(0) = -\frac{1}{2}.}$

3/ a. h est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ (car ...) et, pour tout x de $[0\,;+\infty[$:

$$h'(x) = \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1-(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{-x}{(1+x)^2}$$

Pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $h'(x) \leqslant 0$ donc $\boxed{h \text{ est décroissante sur } [0\,;+\infty[.}$

$h(0) = -\ln(1) = 0$. Comme h est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$: $h(x) \leqslant h(0)$.

$\boxed{h \text{ est donc négative sur } [0\,;+\infty[.}$

b. f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ (car ...) et, pour tout x de $]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x} \times x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$$

c. $f'(x)$ est donc du signe de $h(x)$ sur $x \in]0\,;+\infty[$.

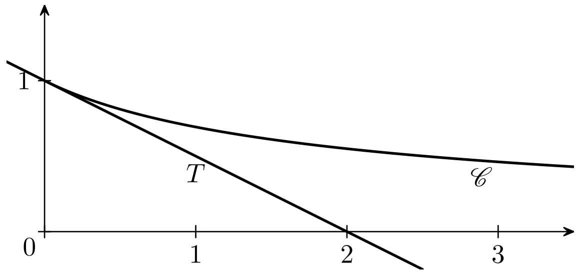
De plus, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} \times \dfrac{1+x}{x}$.

On a $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \text{ (composée à rédiger...)} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+x}{x} = 1 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

On en déduit le tableau suivant :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-\frac{1}{2}$ $\qquad$ $-$
Variations de f	1 $\searrow$ 0

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}$.



Exercice 3

1/ Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) + 2f(x) = \mathrm{e}^{3x} + 3x\mathrm{e}^{3x} + 2x\mathrm{e}^{3x} = (5x+1)\mathrm{e}^{3x}$$

donc $\boxed{f \text{ est solution de } (E).}$

2/ D'après les résultats du cours, les solutions de (H) : $y' + 2y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{x \mapsto C\mathrm{e}^{-2x},\ C \in \mathbb{R}}$

3/ Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
g - f \text{ est solution de } (H) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (g-f)'(x) + 2(g-f)(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) - f'(x) + 2(g(x) - f(x)) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) + 2g(x) = f'(x) + 2f(x)\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) + 2g(x) = (5x+1)\mathrm{e}^{3x} \text{ (car } f \text{ est solution de } (E))\\
&\Leftrightarrow g \text{ est solution de } (E)\\
g - f \text{ est solution de } (H) &\Leftrightarrow g \text{ est solution de } (E)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{g - f \text{ est solution de } (H) \Leftrightarrow g \text{ est solution de } (E)}$$

4/ Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
g \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow g - f \text{ est solution de } (H)\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (g-f)(x) = C\mathrm{e}^{-2x},\ C \in \mathbb{R} \text{ (question 2)}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x) + C\mathrm{e}^{-2x},\ C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{x \mapsto x\mathrm{e}^{3x} + C\mathrm{e}^{-2x},\ C \in \mathbb{R}}$

5/ Soit $g : x \mapsto x\mathrm{e}^{3x} + C\mathrm{e}^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$ une solution de (E) et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative.

$$A(\ln 2 ; 40\ln 2) \in \mathscr{C}_g \Leftrightarrow g(\ln(2)) = 40\ln(2) \Leftrightarrow \ln(2)\mathrm{e}^{3\ln(2)} + C\mathrm{e}^{-2\ln(2)} = 40\ln(2)$$

$$\Leftrightarrow 8\ln(2) + \frac{C}{4} = 40\ln(2) \Leftrightarrow C = 128\ln(2)$$

Conclusion : il existe une solution de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(\ln 2 ; 40\ln 2)$, il s'agit de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{x \mapsto x\mathrm{e}^{3x} + 128\ln(2)\mathrm{e}^{-2x}.}$