

Devoir surveillé de mathématiques

Terminales S – Obligatoire

Mercredi 21 janvier 2009

Éléments de correction

Exercice 1

- Cf. cours.
- Dessin
- On obtient $z_{A'} = 5i = z_C$ et $z_{B'} = -3 - 3i = z_D$.
 - $M(z)$ est invariant par f si et seulement si $z' = z \Leftrightarrow z = (1 + 2i)z - 2 - 4i \Leftrightarrow 2iz = 2 + 2i \Leftrightarrow z = 2 - i$. L'équation ayant une seule solution, f a un seul point invariant Ω d'affixe $\omega = 2 - i$.
- On a $z' - z = 2iz - 2 - 4i = -2i(2 - i - z)$.
 - L'égalité ci-dessus donne :

$$\frac{z' - z}{2 - i - z} = -2i$$

On obtient donc :

$$- \frac{MM'}{\Omega M} = \left| \frac{z' - z}{2 - i - z} \right| = |-2i| = 2$$

$$- (\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}) = \arg\left(\frac{z' - z}{2 - i - z}\right) (2\pi) = \arg(-2i) (2\pi) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$$

- On en déduit que le triangle $\Omega MM'$ est un triangle rectangle en M .
- On a $|z_E|^2 = \sqrt{1+3} = 2$ puis $\cos\theta_E = -\frac{1}{2}$ et $\sin\theta_E = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{On en déduit } \theta_E = -\frac{2\pi}{3} (2\pi)$$

$$\text{Donc } z_E = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

Pour placer le point E , il suffit de construire le cercle de centre O et de rayon 2. Le point E est le point de ce cercle d'abscisse 1.

D'après les questions b. et c. on a $EE' = 2\Omega E$ et $(\overrightarrow{E\Omega}, \overrightarrow{EE'}) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$. On construit donc la perpendiculaire en E à la droite $(E\Omega)$ et on place sur cette droite le point E' tel que $EE' = 2\Omega E$ et $(\overrightarrow{E\Omega}, \overrightarrow{EE'}) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$

Exercice 2

- On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x' et y' réels.
 - Par définition : $z' = \frac{1}{2}(z + i\bar{z})$, c'est-à-dire :
$$x' + iy' = \frac{1}{2}(x + iy + i(x - iy)) = \frac{1}{2}(x + iy + ix + y) = \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2}(x + y)i \quad (1)$$
En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient les égalités annoncées.
On en déduit que $y' = x'$ donc que M' appartient à la droite d'équation $y = x$. Or O et A appartiennent aussi à cette droite, d'où $M' \in (OA)$.
 - $M = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x + y) \\ y = \frac{1}{2}(x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + y \\ 2y = x + y \end{cases} \Leftrightarrow x = y.$
L'ensemble cherché est donc la droite (OA) .

c. L'égalité (1) permet d'obtenir : $z' - z = \dots = \frac{1}{2}(x - y)(-1 + i)$.

On en déduit :

$$\frac{z' - z}{z_A} = \frac{1}{2}(x - y) \frac{-1 + i}{1 + i} = \frac{1}{2}(x - y) \frac{(-1 + i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \dots = \frac{1}{2}i(x - y)$$

Donc $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{MM'}) = \arg\left(\frac{1}{2}i(x - y)\right) (2\pi) = \frac{\pi}{2} (\pi)$ donc $\overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{OA}$.

2. a. Dessin

b. Par définition du point M_3 , $\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{OM_2}$, donc $z_3 - z_1 = z_2 - 0$, ce qui donne : $z_3 - iz = \bar{z}$, c'est-à-dire $z_3 = iz + \bar{z}$.

c. On a : $OM_1 = |z_1| = |iz| = |i| \times |z| = |z|$;

$$OM_2 = |\bar{z}| = |z|.$$

Le parallélogramme $OM_1M_3M_2$ a deux côtés consécutifs de même longueur, c'est donc un losange.

d. $z' - z = \frac{1}{2}(z + i\bar{z}) - z = \frac{1}{2}(z + i\bar{z} - 2z) = \frac{1}{2}(i\bar{z} - z)$.

Par ailleurs, $\frac{1}{2}iz_3 = \frac{1}{2}i(iz + \bar{z}) = \frac{1}{2}(-z + i\bar{z})$, on a donc bien $z' - z = \frac{1}{2}iz_3$.

On en déduit que $|z' - z| = \left|\frac{1}{2}iz_3\right| = \frac{1}{2} \times |i| \times |z_3| = \frac{1}{2}|z_3|$, c'est-à-dire que $MM' = \frac{1}{2}OM_3$.

3. On a déjà $OM = OM_1 = OM_2 = |z|$, les points M, M_1 et M_2 sont donc sur un même cercle de centre O . M_3 appartient à ce cercle si et seulement si $OM_3 = OM$ c'est-à-dire (d'après la question 2d) si et seulement si $MM' = \frac{1}{2}OM$.

Le triangle OMM' est rectangle en M' ; en effet $M' \in (OA)$ et $(MM') \perp (OA)$ (question 1), on a donc :

$$\sin \widehat{M'OM} = \frac{MM'}{OM} = \frac{\frac{1}{2}OM}{OM} = \frac{1}{2}$$

On en déduit que $\widehat{M'OM} = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 3

Partie A

1. Pour tout x de $]0; +\infty[$, $f(x) = 20xe^{-\frac{1}{2}x} + 10e^{-\frac{1}{2}x} = -40 \times -\frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x} + 10e^{-\frac{1}{2}x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}x = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^X = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x} = 0.$$

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = 0$.

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

2. f est dérivable sur $I =]0; +\infty[$ (composée et produit de fonctions dérivables) et, pour tout x de I : $f'(x) = (20 - 10x - 5)e^{-\frac{1}{2}x} = (15 - 10x)e^{-\frac{1}{2}x}$ qui est du signe de $(15 - 10x)$ car $e^{-\frac{1}{2}x} > 0$. Cette dérivée s'annule en $\frac{3}{2}$. D'où le tableau de variations :

x	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de $f(x)$	10	$40e^{-\frac{3}{4}}$	0

3. Sur $]0; \frac{3}{2}]$, $f(x) > 10$, donc l'équation $f(x) = 10$ n'a pas de solution. Sur l'intervalle $]\frac{3}{2}; +\infty[$, on applique (en le rédigeant) le théorème de la bijection. Il existe donc un réel unique $\alpha \in]\frac{3}{2}; +\infty[$ tel que $f(x) = 10$. La calculatrice donne $\alpha \approx 4,673$.

Partie B

1. On a effectivement $f(t) + \frac{1}{2}f'(t) = (15 - 10t)e^{-\frac{1}{2}t} + (10t + 5)e^{-\frac{1}{2}t} = 20e^{-\frac{1}{2}t}$. Donc f est une solution de (E) sur $]0; +\infty[$.
2. a. $\forall t \in]0; +\infty[$, $(g - f)'(t) + \frac{1}{2}(g - f)(t) = g'(t) - f'(t) + \frac{1}{2}g(t) - \frac{1}{2}f(t) = \left(g'(t) + \frac{1}{2}g(t)\right) - \left(f'(t) + \frac{1}{2}f(t)\right) = 20e^{-\frac{1}{2}t} - 20e^{-\frac{1}{2}t} = 0$
Conclusion : la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, de l'équation différentielle : $(E') y' + \frac{1}{2}y = 0$.
b. Les solutions de l'équation (E') sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-t/2}$.
c. La fonction $(g - f)$ est l'une de ces solutions. Donc $g(t) = f(t) + Ce^{-t/2}$. Or $g(0) = f(0) = 10$ donc $C = 0$. Ainsi $g = f$.
Conclusion : l'équation différentielle (E) a une solution unique vérifiant $y'(0) = 10$, c'est la fonction f de la **partie A**.
3. D'après la question 3. de la partie A, cela correspond à la valeur α telle que $f(\alpha) = 10$. On a vu que $\alpha \approx 4,673\text{h} \approx 4 \text{ h } 40\text{min}$.