Devoir surveillé n^o 5

Durée : 2 heures

Exercice 1 (4,5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par qwwqwwwewqeweq :

$$f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{e}^{-x}\right)$$

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

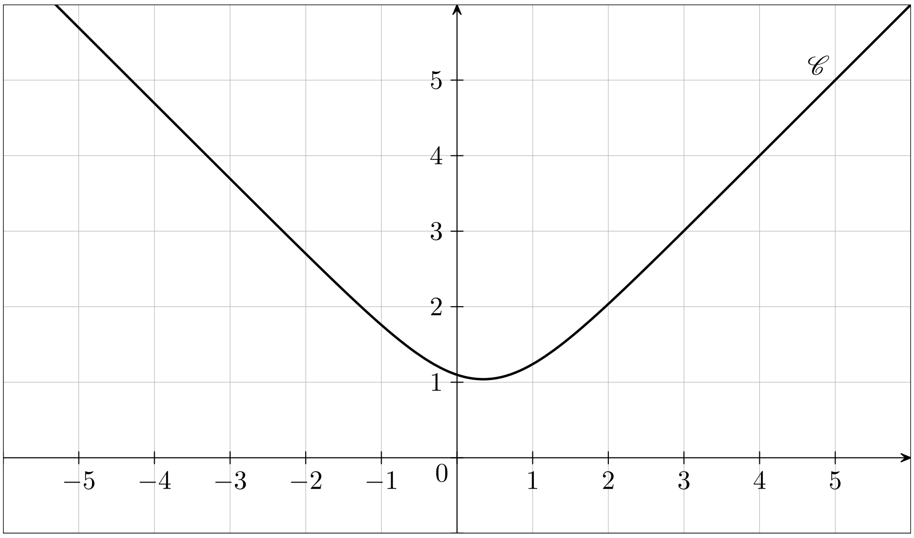
1/ Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x + \ln\left(1 + 2\mathrm{e}^{-2x}\right)$.
On admet que, pour tout réel x, $f(x) = -x + \ln\left(2 + \mathrm{e}^{2x}\right)$.

2/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de d.

3/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d' d'équation $y = -x + \ln 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

4/ Étudier les variations de la fonction f.
Montrer que le minimum de la fonction f est égal à $\dfrac{3}{2}\ln 2$.

5/ Tracer les droites d et d' sur la figure ci-dessous.



Exercice 2 (2,5 points)

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, un résultat de cours.

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$, positive sur $[1\,;+\infty[$, et vérifie :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y,\quad \ln(xy) = \ln x + \ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif } x,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x} \\ \ln(2) \simeq 0,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \end{cases}$$

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x$$

1/ Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0\,;+\infty[$.

2/ En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

3/ En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Exercice 3 (10 points)

Partie A
Cette partie a pour but la résolution de l'équation différentielle :

$$y' - 2y = x\mathrm{e}^x \quad (E_1)$$

1/ Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' - 2y = 0 \quad (E_2)$$

2/ Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -(x+1)\mathrm{e}^x$ est solution de l'équation (E_1).

3/ Montrer qu'une fonction v est solution de (E_1) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_2).

4/ En déduire l'ensemble des solutions de (E_1) puis déterminer la solution de (E_1) qui s'annule en 0.

Partie B
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2\mathrm{e}^x - x - 2$$

1/ Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

2/ Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variations complet.

3/ Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles, vérifier que 0 est l'une de ces solutions puis déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de l'autre solution que l'on notera α.

4/ En déduire le tableau de signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie C
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - (x+1)\mathrm{e}^x$$

1/ Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2/ Prouver que $f(\alpha) = -\dfrac{1}{4}\alpha(\alpha+2)$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

3/ Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ puis démontrer que $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.

4/ Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations complet.

Exercice 4 (Non spécialistes - 3 points)

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2^x}{x^2}$$

1/ Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$

2/ Étudier les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 5 (Spécialistes - 3 points)

1/ Déterminer le PGCD de 1 259 et 533 075

2/ Déterminer tous les couples $(a\,;\,b) \in \mathbb{N}^2$ avec $a \geqslant b$ tels que :

$$\mathrm{PGCD}(a,b) = 18 \qquad \text{et} \qquad ab = 900$$

3/ Déterminer l'ensemble des entiers naturels n impairs tels que la fraction $A_n = \dfrac{n^3 - n}{n+2}$ soit irréductible.