Devoir surveillé n° 5

Durée : 2 heures

Exercice 1 (4,5 points)

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante d'inconnue z :

$$(E_1) : z = (1+\mathrm{i})\overline{z} + 3 - 2\mathrm{i}$$

2/ Soit $z_1 = \sqrt{3} + 3\mathrm{i}$, $z_2 = 1 - \mathrm{i}$ et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$

a) Donner l'écriture de Z sous forme algébrique.

b) Déterminer le module et un argument de z_1 puis de z_2.

c) En déduire l'écriture de Z sous forme trigonométrique.

d) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$

Exercice 2 (2,5 points)

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, un résultat de cours.

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$, positive sur $[1\,;+\infty[$, et vérifie :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y,\quad \ln(xy) = \ln x + \ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif } x,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x} \\ \ln(2) \simeq 0,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \end{cases}$$

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x$$

1/ Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0\,;+\infty[$.

2/ En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

3/ En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Exercice 3 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2^x}{x^2}$$

1/ Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$

2/ Étudier les variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 4 (10 points)

Partie A

Cette partie a pour but la résolution de l'équation différentielle :

$$y' - 2y = x\mathrm{e}^x \quad (E_1)$$

1/ Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' - 2y = 0 \quad (E_2)$$

2/ Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -(x+1)\mathrm{e}^x$ est solution de l'équation (E_1).

3/ Montrer qu'une fonction v est solution de (E_1) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_2).

4/ En déduire l'ensemble des solutions de (E_1) puis déterminer la solution de (E_1) qui s'annule en 0.

Partie B
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2\mathrm{e}^x - x - 2$$

1/ Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

2/ Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variations complet.

3/ Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles, vérifier que 0 est l'une de ces solutions puis déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de l'autre solution que l'on notera α.

4/ En déduire le tableau de signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie C
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - (x+1)\mathrm{e}^x$$

1/ Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2/ Prouver que $f(\alpha) = -\dfrac{1}{4}\alpha(\alpha + 2)$.

3/ Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ puis démontrer que $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.

4/ Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations complet.