Devoir surveillé n° 4

Durée : 1 heure

Exercice 1 (6 points)

1/ Résoudre les équations suivantes :

$$(E_1) : \mathrm{e}^{x^2+2} = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}} \qquad (E_2) : 2\mathrm{e}^{2x} + 5\mathrm{e}^{x} - 3 = 0$$

2/ Résoudre l'inéquation suivante :

$$(I) : \mathrm{e}^{x^2} - 2 \leqslant 1$$

Exercice 2 (6 points)

Dans chacun des cas suivants, déterminer les limites de f aux bornes de I puis calculer et simplifier la dérivée de f sur I (la justification de la dérivabilité n'est pas demandée).

1/ $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{2x+3}{x-2}}$ et $I =]2\,;\,+\infty[$

2/ $f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ et $I =]0\,;\,+\infty[$

3/ $f(x) = (x^2+4)\mathrm{e}^{-2x}$ et $I = \mathbb{R}$

4/ $f(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{x} - 3\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}$ et $I = \mathbb{R}$

Exercice 3 (8 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x} - x + 1$$

1/ Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2/ Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.

3/ Déterminer les limites de f' en $+\infty$ et $-\infty$.

4/ Étudier les variations de f' puis démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. Donner un encadrement de α à 10^{-2}.

5/ En déduire le signe de f' puis les variations de f.

6/ Déterminer l'équation de la droite asymptote à la courbe représentant f en $+\infty$.