Devoir surveillé n° 4

Durée : 2 heures

Exercice 1 (8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1/ a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Établir que, pour tout nombre réel x non nul, on a $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

2/ Donner, sans démontrer, la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ et démontrer que f est continue en 0.

3/ a) Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a : $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$, et que l'égalité n'a lieu que pour $x = 0$.

b) Calculer la dérivée f' de la fonction f et déterminer la fonction g telle que, pour tout nombre réel x non nul, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x g(x)}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$.

c) Donner le tableau des variations de f.

4/ Soient x un nombre réel non nul et les points $M(x\ ;\ f(x))$ et $M'(-x\ ;\ f(-x))$ de la courbe $\mathscr{C}$.

a) Établir que $f(-x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$, puis déterminer le coefficient directeur de la droite (MM').

b) On admet que la fonction f est dérivable en 0. Que suggère alors le résultat précédent ?

Exercice 2 (8 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{2x} + x^2\right)$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1/ Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2/ Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que $f'(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^{2x} + x$ sur $\mathbb{R}$.

3/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \mathrm{e}^{2x} + x$.

a) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.

b) Étudier les variations de g.

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur $\mathbb{R}$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

d) En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x.

4/ Dresser le tableau de variations de f.

5/ Démontrer que la droite d d'équation $y = 2x$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

Exercice 3 (4 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note f_n, la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$$

1/ Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel x, on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{(n-1)x}}$$

2/ Étudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.

3/ Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.