Devoir surveillé n° 4

Terminale 7 S - 2010/2011

3 décembre 2010 – Durée : 1 heure

Exercice 1 — 2 points

Résoudre l'équation suivante :

$$(E) : \mathrm{e}^{2x} - \left(2+\mathrm{e}^2\right)\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^2 = 0$$

Exercice 2 — 6 points

Dans les deux cas suivants, déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$, calculer $f'(x)$ sur $\mathcal{D}_f$ (la justification de la dérivabilité n'est pas demandée) puis étudier les variations de f.

1. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{4x^2+1}$; $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{4}{2x-1}}$; $\mathcal{D}_f = \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$

Exercice 3 — 12 points

Partie A - Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.
Démontrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$.

Partie B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$$

On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ du plan.

1. *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*
   Étudier les variations de la fonction f et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variations le plus complet possible.
2. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.

Partie C - Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x+1)\mathrm{e}^{kx}$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal du plan.
On remarque que le cas $k=-1$ a été traité dans la partie B, car on a $f_{-1} = f$ et $\mathcal{C}_{-1} = \mathcal{C}$.

1. a) Quelle est la nature de la fonction f_0 ?
   b) Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.
   Vérifier que, pour tout entier k, ces points appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_k$.
2. Étudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de l'expression : $(x+1)\left(\mathrm{e}^x-1\right)$.
   En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$.
3. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.
   En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k (On distinguera les cas : $k>0$ et $k<0$).