Devoir surveillé n° 4

Éléments de correction

Exercice 1

1/

$$(E_1) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2+2} = \mathrm{e}^{2x-1} \Leftrightarrow x^2+2 = 2x-1 \Leftrightarrow x^2-2x+3=0$$

$\boxed{\mathscr{S} = \varnothing}$

$$(E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} X = \mathrm{e}^x \\ 2X^2+5X-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \mathrm{e}^x \\ X = -3 \text{ ou } X = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = -3 \text{ ou } \mathrm{e}^x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln 2$$

$\boxed{\mathscr{S} = \{-\ln 2\}}$

2/

$$(I) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2} \leqslant 3 \Leftrightarrow x^2 \leqslant \ln 3 \Leftrightarrow -\sqrt{\ln 3} \leqslant x \leqslant \sqrt{\ln 3}$$

$\boxed{\mathscr{S} = \left[-\sqrt{\ln 3}\,;\,\sqrt{\ln 3}\right]}$

Exercice 2

1/
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{x-2} = 2$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{e}^2}$
- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x+3}{x-2} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty}$
- $\forall x \in I,\ f'(x) = \dfrac{2(x-2)-(2x+3)}{(x-2)^2}\mathrm{e}^{\frac{2x+3}{x-2}} = \boxed{\dfrac{-7}{(x-2)^2}\mathrm{e}^{\frac{2x+3}{x-2}}}$

2/
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \mathrm{e}^X = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1$ ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$
- $\forall x \neq 0,\ f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$.

  $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty}$
- $\forall x \in I,\ f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \boxed{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$

3/
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+4 = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2\mathrm{e}^{-2x} + 4\mathrm{e}^{-2x} = \dfrac{1}{4}(-2x)^2\mathrm{e}^{-2x} + 4\mathrm{e}^{-2x}$

  $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} X^2\mathrm{e}^X = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x)^2\mathrm{e}^{-2x} = 0$ donc

  $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$
- $\forall x \in I,\ f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-2x} + (x^2+4)\times(-2)\mathrm{e}^{-2x} = \boxed{-2(x^2-x+4)\mathrm{e}^{-2x}}$

4/ • $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2 - 3\mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2}$

• $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x} - 3}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3}$

• $\forall x \in I,\ f'(x) = \dfrac{(2\mathrm{e}^{x} + 3\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) - (2\mathrm{e}^{x} - 3\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x})}{(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})^2} = \boxed{\dfrac{10}{(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})^2}}$

Exercice 3

1/ • $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} - x + 1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -x+1 = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$.

• $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x + 1 - x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x})$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

2/ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+1)\mathrm{e}^{-x} - 1 = \boxed{-x\mathrm{e}^{-x} - 1}$

3/ $\lim\limits_{x \to +\infty} -x\mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = -1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$

4/ f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} = (x-1)\mathrm{e}^{-x}$ qui est du signe de $x - 1$.

f' est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,1]$ et strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.
En appliquant le théorème de la bijection sur $]-\infty\,;\,1]$ puis en remarquant que l'équation n'a pas de solution sur $[1\,;\,+\infty[$, on obtient le résultat demandé.

De plus $\boxed{-0{,}57 \leqslant \alpha \leqslant -0{,}56}$.

5/ On en déduit : $f'(x) > 0$ pour $x < \alpha$ et $f'(x) < 0$ pour $x > \alpha$. f est donc strictement croissante sur $]-\infty\,;\,\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

6/ D'après la première question, $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)\mathrm{e}^{-x} = 0$ donc la droite d'équation $\boxed{y = -x + 1}$ est asymptote à la courbe représentant f en $+\infty$.