# Devoir surveillé n° 9 – Obligatoire

Durée : 2 heures

## Exercice 1 (5 points)

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dont le tableau des variations est donné ci-dessous :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $1$ |

On définit la fonction $F$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

1/ Étudier les variations de $F$ sur $\mathbb{R}$.

2/ Démontrer que : $1 \leqslant F(2) \leqslant 4$.

3/ Démontrer que, pour tout $x \geqslant 1$ :

$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant x - 1$$

4/ Étudier la limite de $F(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

## Exercice 2 (7 points)

1/ On pose, pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_1$.

b) Prouver que, pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

c) Montrer, en utilisant une intégration par parties que pour tout entier naturel $n$ non nul, on a :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$$

2/ On considère la suite réelle $(a_n)$, définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$a_n = \frac{1}{\mathrm{e}} + (-1)^n I_n$$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

## Exercice 3 (5 points)

### Partie A

1/ Soit $x$ un réel supérieur ou égal à 1.
Calculer en fonction de $x$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^x (2-t)\,\mathrm{d}t$.

2/ Démontrer que pour tout réel $t$ appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, on a : $2-t \leqslant \dfrac{1}{t}$.

3/ Déduire de ce qui précède que pour tout réel $x$ supérieur ou égal à 1, on a :

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \leqslant \ln x$$

### Partie B

Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - \dfrac{3}{2}$.
Sur le graphique de l'annexe, le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ dans lequel on a tracé les courbes représentatives des fonctions $h$ et ln sur l'intervalle $[1\ ;\ 4]$. On a a tracé également la droite $d$ d'équation $x = 4$.

1/ a) Démontrer que $\displaystyle\int_1^4 h(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

b) Illustrer sur le graphique le résultat de la question précédente.

2/ On note $(D)$ le domaine du plan délimité par la droite $d$ et les courbes représentatives des fonction $h$ et ln sur l'intervalle $[1\ ;\ 4]$.
En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire de $(D)$ en unités d'aire.

## Exercice 4 (3 points)

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-3}^{3} \sqrt{9x^2 - x^4}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_{-1}^{2} (1 - |x-1|)^n\,\mathrm{d}x$$

# ANNEXE

## Nom :

**Exercice 3**