Devoir surveillé n° 9
Terminale 7 S - 2010/2011
6 avril 2011 – Durée : 1 heure

Exercice 1 **8 points**

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$$

1. Montrer que pour tout $x > 1$:

$$\frac{\ln x}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln x}{x}$$

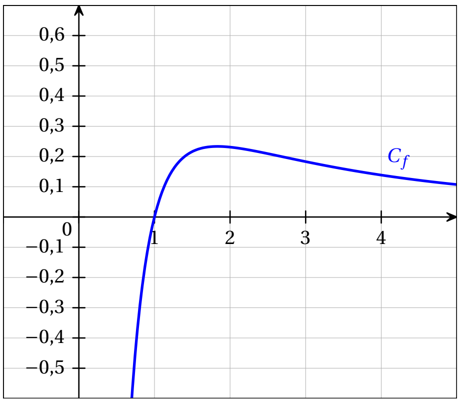
2. a) Calculer $I = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (on pourra utiliser une intégration par parties pour cette dernière).

   b) En déduire un encadrement de $K = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   c) La figure ci-contre représente la courbe représentative de f (unités graphiques : en abscisse 1 cm pour 1 unité, en ordonnées 4 cm pour 1 unité). On considère l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que :

$$\begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

   et on note $\mathscr{A}$ son aire.
   À l'aide de l'encadrement précédent, donner un encadrement de $\mathscr{A}$ en cm^2.



Exercice 2 **12 points**

Soit u_n l'intégrale définie par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

1. Justifier que u_n est définie pour tout entier naturel n. On ne cherchera pas à calculer u_n.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n \geqslant 0$$

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} + u_n = \frac{1}{2(n+1)}$$

4. Calculer u_0. En déduire la valeur de u_1, puis celle de u_2.
5. En étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$, déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2(n+1)}$$

   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.