Devoir surveillé n° 9
Terminale 7 S - 2010/2011
Éléments de correction

Exercice 1

1. Pour tout $x > 1$: $x^2 > x$
On en déduit donc que, pour tout $x > 1$:
$$2x < x^2 + x < 2x^2$$
donc, la fonction inverse étant décroissante sur $]0;+\infty[$:
$$\frac{1}{2x} > \frac{1}{x^2+x} > \frac{1}{2x^2}$$
comme $2\ln x > 0$ sur $]1;+\infty[$, on a :
$$\boxed{\frac{\ln x}{x} > f(x) > \frac{\ln x}{x^2}}$$

2. a) – $I = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^4 2\frac{1}{x}\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_2^4 = \frac{1}{2}\left((\ln 4)^2 - (\ln 2)^2\right) = \frac{1}{2}\left((2\ln 2)^2 - (\ln 2)^2\right) = \boxed{\frac{3}{2}(\ln 2)^2}$

– $J = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_2^4 \ln x \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_2^4 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ en posant : $\begin{cases} u(x) = \ln x & v(x) = -\frac{1}{x} \\ u'(x) = \frac{1}{x} & v'(x) = \frac{1}{x^2}\end{cases}$

Les fonctions u' et v' étant continues sur $[2;4]$, on obtient, par intégration par parties :
$J = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_2^4 - \displaystyle\int_2^4 -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_2^4 - \left[\frac{1}{x}\right]_2^4 = -\frac{\ln 4}{4} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = -\frac{2\ln 2}{4} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}$

b) Pour tout $x \in [2;4]$, $\dfrac{\ln x}{x^2} < f(x) < \dfrac{\ln x}{x}$ et $2 < 4$
On en déduit :
$$\int_2^4 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x < \int_2^4 f(x\,\mathrm{d}x < \int_2^4 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$
donc :
$$\boxed{J < K < I}$$

c) La fonction f est positive sur $[2;4]$ et $2 < 4$ donc $\mathscr{A} = I$ en unités d'aires. Or $1\,\text{ua} = 1\,\text{cm} \times 4\,\text{cm} = 4\,\text{cm}^2$.
Ainsi $4J < \mathscr{A} < 4I$ donc $\boxed{1\,\text{cm}^2 < \mathscr{A} < 2.9\,\text{cm}^2}$

Exercice 2

1. Pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{2n+1}}{1+x^2}$ est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[0;1]$.
$\boxed{\text{L'intégrale } u_n \text{ est donc définie pour tout entier naturel } n.}$

2. Pour tout entier naturel n :
$$\forall x \in [0;1],\quad \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} \geqslant 0$$
donc :
$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$
Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n \geqslant 0.}$

3. Pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^{2(n+1)+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{1+x^2} + \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}(x^2+1)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 x^{2n+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2n+2}x^{2n+2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2(n+1)}}$$

4.
$$u_0=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1=\boxed{\frac{1}{2}\ln 2}$$

D'après la question précédente, on a (pour $n=0$) :

$$u_1=\frac{1}{2(0+1)}-u_0=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2=\boxed{\frac{1}{2}(1-\ln 2)}$$

et (pour $n=1$) :

$$u_2=\frac{1}{2(1+1)}-u_1=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}(1-\ln 2)=\boxed{\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}}$$

5. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^1 \frac{x^{2(n+1)+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x-\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{1+x^2}-\frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{x^{2n+1}(x^2-1)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

De plus :

$$\forall x\in[0\,;1]\,,\quad x^2-1\leqslant 0$$

donc :

$$\forall x\in[0\,;1]\,,\quad \frac{x^{2n+1}(x^2-1)}{1+x^2}\leqslant 0$$

On en déduit :

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}(x^2-1)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

6. D'après la question 2, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\leqslant 0$.

De plus, d'après la question 3, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}+u_n=\dfrac{1}{2(n+1)}$ donc $u_n=\dfrac{1}{2(n+1)}-u_{n+1}\leqslant\dfrac{1}{2(n+1)}$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $\boxed{0\leqslant u_n\leqslant\dfrac{1}{2(n+1)}}$

D'aprés le théorème des gendarmes, $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge et } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0.}$