# Devoir à rendre le 15 avril 2011
## Terminale 7 S - 2010/2011

## Exercice 1

1. Établir que pour tout réel $x$, on a :
$$e^x - x \geqslant \frac{e^x}{2}$$

Soit $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_0^n \varphi(x)\,dx$.

2. a) Déterminer soigneusement les limites de $\varphi$ aux bornes de son ensemble de définition.
   b) Étudier les variations de $\varphi$ puis dresser son tableau de variations complet.
3. Donner une interprétation géométrique de $(u_n)$.
4. Étudier les variations de $(u_n)$.
5. a) Montrer que pour tout entier naturel $n$, on a :
$$u_n \leqslant \int_0^n 2xe^{-x}\,dx$$
   b) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $\displaystyle\int_0^n 2xe^{-x}\,dx$ en fonction de $n$.
   c) En déduire que $(u_n)$ est majorée par 2. Que peut-on en conclure concernant $(u_n)$ ?

## Exercice 2

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers $e^2$.
On définit, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'intégrale
$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x\,dx$$

1. Calculer $I_1$.
2. Établir que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ :
$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{2^n}{n!}\left(e^2 - 1\right)$$
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ :
$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$
4. Démontrer par récurrence que :
$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + I_n$$
5. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ : $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.
   a) Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$ :
$$u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}u_n$$
   b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$ :
$$0 \leqslant u_n \leqslant u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$
6. En déduire la limite de la suite $(u_n)$ puis celle de la suite $(I_n)$.
7. Justifier enfin que :
$$e^2 = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}\right)$$