Devoir surveillé n° 8

Durée : 2 heures

Exercice 1 (5 points)

Partie A - Démonstration de cours

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante non majorée.

1/ Soit M un nombre réel.

a) Justifier qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} \geqslant M$.

b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant M$$

2/ Quelle est la conséquence pour la suite u ?

3/ Énoncer le théorème du cours ainsi démontré.

Partie B

Indiquer, pour chacune des quatres affirmations suivantes, si elle est vraie ou si elle est fausse et proposer une démonstration.

Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple.

1/ Si une suite n'est pas majorée alors alors elle tend vers $+\infty$.

2/ Si une suite est croissante alors elle tend vers $+\infty$.

3/ Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée.

4/ Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle est croissante.

Exercice 2 (7 points)

1/ Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$$

Étudier les variations de f sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

2/ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 < u_{n+1} < u_n$$

b) Démontrer que (u_n) converge.

c) Déterminer la limite de (u_n).

3/ On cherche à exprimer u_n en fonction de n. Pour cela on définit les suites (v_n) et (w_n) par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \qquad \text{et} \qquad w_n = \ln v_n$$

a) Vérifier que (v_n) et (w_n) sont définies pour tout entier n.

b) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.

c) Exprimer w_n puis v_n en fonction de n pour tout entier n.

d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$$

e) Retrouver la limite de (u_n).

Exercice 3 (3 points)

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(t) = \frac{1}{t+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{t+1}}$$

et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1/ Étudier la parité de F.

2/ a) Démontrer que pour tout réel positif t :

$$f(t) \geqslant \frac{1}{t+1}$$

b) En déduire que pour tout réel x :

$$F(x) \geqslant \ln(x^2+1)$$

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

3/ a) Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer F'.

b) Dresser le tableau de variations de F.