Devoir surveillé n^{o} 8

Éléments de correction

Exercice 1

Partie A

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante non majorée.

1/ Soit M un nombre réel.

a) (u_n) n'est pas majorée donc il existe un entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} \geqslant M$.

b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant u_{n_0} \text{car } (u_n) \text{ est croissante} \Rightarrow u_n \geqslant M$$

2/ Pour tout réel M, il existe un entier naturel n_0 tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant M$ domc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3/ « Une suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$ »

Partie B

1/ « Si une suite n'est pas majorée alors alors elle tend vers $+\infty$. »
FAUX : La suite définie par $u_n = (-2)^n$ n'est pas majorée et ne tend pas vers $+\infty$.

2/ « Si une suite est croissante alors elle tend vers $+\infty$. »
FAUX : La suite définie par $u_n = \frac{-1}{n+1}$ est croissante et ne tend pas vers $+\infty$.

3/ « Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée. »
VRAI : Si (u_n) tend vers $+\infty$ alors pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe un entier naturel n_0 tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant M$. Donc (u_n) n'est pas majorée.

4/ « Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle est croissante. »
FAUX : La suite définie par $u_n = 2n$ si n est pair et $u_n = n$ si n est impair tend vers $+\infty$ mais n'est pas croissante.

Exercice 2

1/ f est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ (à justifier) et, pour tout x de $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$:

$$f'(x) = \frac{2x(2x-1)-2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2-2x}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$$

Une étude de signe montre que f est strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{2}\,;1\right]$ et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

2/ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Initialisation : On a $u_1 = \frac{4}{3}$ donc $1 < u_1 < u_0$.
Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $1 < u_{p+1} < u_p$.
f est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$ donc $f(1) < f(u_{p+1}) < f(u_p)$ ainsi $1 < u_{p+2} < u_{p+1}$
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_{n+1} < u_n$.

b) D'après la question précédente, (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc (u_n) converge.

c) f étant continue sur $[1\,;+\infty[$ donc la limite de (u_n) est solution de l'équation $x = f(x)$.
Cette équation admet deux solutions (calculs à faire...) qui sont 0 et 1. Comme u_n est minorée par 1, la limite ne peut être 0.
On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3/ a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$ donc $u_n \neq 0$. Ainsi (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$ donc $\frac{u_n - 1}{u_n} > 0$. Ainsi (w_n) est définie sur $\mathbb{N}$.

b) $\forall \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \ln v_{n+1} = \ln\left(\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(1 - \frac{2u_n - 1}{u_n^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n^2}\right) = \ln\left(\frac{(u_n-1)^2}{u_n^2}\right) = \ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right)^2 = 2\ln\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right) \\ &= 2\ln v_n = 2w_n \end{aligned}$$

(w_n) est une donc suite géométrique de raison 2.

c) On a $w_0 = \ln v_0 = \ln \frac{1}{2}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \ln \frac{1}{2} \times 2^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \mathrm{e}^{w_n} = \mathrm{e}^{\ln \frac{1}{2} \times 2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{u_n}$ donc $1 - v_n = \dfrac{1}{u_n}$ ainsi $u_n = \dfrac{1}{1 - v_n} = \dfrac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$

e) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty \\ \lim\limits_{N \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^N = 0 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} = 0$. On en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Exercice 3

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}(\ln \mathrm{e})^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2 = \frac{1}{2}$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{-\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \left[-\ln(1+\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\ln\left(1 + \cos\frac{\pi}{2}\right) + \ln(1 + \cos 0) = \ln 2$$

Exercice 4

1/ $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(-x) = \displaystyle\int_0^{(-x)^2} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x)$. La fonction F est paire.

2/ a) Pour tout réel positif t, $\frac{1}{t+1} > 0$ donc $\mathrm{e}^{\frac{1}{t+1}} > 1$ donc $\frac{1}{t+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{t+1}} > \frac{1}{t+1}$ ainsi $f(t) \geqslant \frac{1}{t+1}$

b) Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$ et pour tout $t \in [0\,;x^2]$, $f(t) \geqslant \frac{1}{t+1}$ donc $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{x^2} \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t$.

$\displaystyle\int_0^{x^2} \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = [\ln(t+1)]_0^{x^2} = \ln(x^2+1)$.

Donc pour tout réel x, $F(x) \geqslant \ln(x^2+1)$

c) Par composée (à rédiger) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$ donc, par comparaison $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

3/ a) Soit G une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$.
On a alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = G(x^2) - G(0)$.
$x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et G est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ donc, par composée, F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 2xG'(x^2) = 2xf(x^2) = \dfrac{2x}{x^2+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2+1}}$

b) F est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.