Devoir surveillé n° 1

Éléments de correction

Exercice 1

1/ Par composée, on obtient $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \sin 1$.

2/ En encadrant $\sin x$ et $\cos x$ entre -1 et 1, on obtient :

$$\forall x > 0, -\frac{2}{x} \leqslant g(x) \leqslant \frac{2}{3}$$

On en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

3/ En majorant $\cos x$ par 1, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \leqslant x + 2$$

On en déduit : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

4/ $\forall x \neq \dfrac{k\pi}{2}, j(x) = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{\sin 3x}{3x} \times \dfrac{2x}{\sin 2x}$

Par composée et par produit, on en déduit $\lim\limits_{x \to 0} j(x) = \dfrac{3}{2}$

5/ $\forall x > 0, k(x) = \sqrt{x} \times \dfrac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

Par composée et par produit, on en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = +\infty$

Exercice 2

1/ $\forall x > 0, f(x) = x\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} - 2x = x\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} - 2\right)$

Par composée et par produit, on en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

2/ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$

Par composée et par quotient, on en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Exercice 3

1/ $\mathscr{D}_f = [0; 1[\cup]1; +\infty[$.

2/ $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 1} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 1} f(x) = -\infty$.

En factorisant, par exemple, numérateur par $x\sqrt{x}$ et dénominateur par $\sqrt{x}$, on obtient :

$$\forall x > 1, f(x) = x \times \frac{2 - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

On en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3/ On obtient

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, f(x) = 2x - 4 - \frac{3}{\sqrt{x} - 1}$$

4/ Les asymptotes sont les droites d'équation $x = 1$ et $y = 2x - 4$.

Exercice 4

1/ $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$.

2/ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$.

Après avoir étudié le signe de $-x^2 + 2x + 3$, on obtient :

$$\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} -1} = -\infty, \ \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} -1} = +\infty, \ \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} 3} = +\infty \ \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 3} = -\infty$$

3/ Les asymptotes sont les droites d'équation $x = -1$, $x = 3$ et $y = -2$.

Exercice 5

1/ $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2/ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ (fonction rationnelle)

$\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 2} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 2} f(x) = -\infty$

3/ $\forall x \in \mathscr{D}_f, f(x) - (-2x - 3) = \cdots = \dfrac{9}{4 - 2x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9}{4 - 2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{9}{4 - 2x} = 0$ donc la droite d est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

Exercice 6

1/ $x \in \mathscr{D}_f \Leftrightarrow \dfrac{2x - 6}{3x + 3} \geqslant 0$. Une étude de signe donne : $\mathscr{D}_f =]-\infty; -1[\cup [3; +\infty[$.

2/ Par composée : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ et $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} -1} f(x) = +\infty$