Devoir surveillé n° 1

Éléments de correction

Exercice 1

1/ $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^{+*}}$.

2/ a) Limite en 0 :

$$\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(x) = 1 + \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1 \end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} = 1.$$

De plus $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \times \dfrac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Conclusion $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty}$

b) Limite en $+\infty$:

$$\forall x \in \mathscr{D}_f,\ -1 \leqslant \sin\left(\sqrt{x}\right) \leqslant 1$$

$$x - 1 \leqslant x + \sin\left(\sqrt{x}\right) \leqslant x + 1$$

$$\frac{x-1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x+1}{x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ (Limite du quotient des termes de plus haut degré)

donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$

Exercice 2

1/ L'ensemble de définition de f est l'ensemble des réels x tels que $\dfrac{4-2x}{-3-3x} \geqslant 0$.

Un tableau de signes (à faire !) nous donne : $\boxed{\mathscr{D}_f =]-\infty\,;\,-1[\cup [2\,;\,+\infty[}$

2/ a) Limite en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4-2x}{-3-3x} = \dfrac{2}{3} \\ \lim\limits_{X\to\frac{2}{3}} \sqrt{X} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \end{array}\right\} \text{ donc } \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}}$$

b) Limite en $-\infty$

On obtient de façon analogue : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{3}}}$

c) Limite en -1

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}-1} 4 - 2x = 6 \\ \lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}-1} -3 - 3x = 0^+ \end{array}\right\} \text{ donc } \lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}-1} \dfrac{4-2x}{-3-3x} = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc } \boxed{\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}-1} f(x) = +\infty}$$

Exercice 3

1/ $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}}$

2/ a) Limites en $+\infty$ et $-\infty$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x$.

On a donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ et, de la même façon, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

b) Limites en 2 et -2

Le signe de $x^2 - 4$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signe de $x^2 - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit les limites suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} -2} x^3 + 2x^2 - 5x - 9 = 1 \\ \lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} -2} x^2 - 4 = 0^+ \end{array}\right\} \text{donc, par quotient, } \boxed{\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} -2} f(x) = +\infty}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -2} x^3 + 2x^2 - 5x - 9 = 1 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -2} x^2 - 4 = 0^- \end{array}\right\} \text{donc, par quotient, } \boxed{\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -2} f(x) = -\infty}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 2} x^3 + 2x^2 - 5x - 9 = -3 \\ \lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 2} x^2 - 4 = 0^- \end{array}\right\} \text{donc, par quotient, } \boxed{\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 2} f(x) = +\infty}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 2} x^3 + 2x^2 - 5x - 9 = -3 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 2} x^2 - 4 = 0^+ \end{array}\right\} \text{donc, par quotient, } \boxed{\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 2} f(x) = -\infty}$$

c) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc deux asymptotes parallèles aux axes : la droite d'équation $x = 2$ et la droite d'équation $x = -2$.

3/ $\forall x \in \mathbb{D}_f$, $d(x) = f(x) - (x+2) = \cdots = \dfrac{-x-1}{x^2-4}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x-1}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x} = 0$. De même $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x-1}{x^2-4} = 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{la droite } d \text{ est asymptote à } \mathscr{C}_f \text{ en } +\infty \text{ et } -\infty}$.

4/ Le signe de $d(x)$ est donné par le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
Signe de $x^2 - 4$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $-x-1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $d(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

On en déduit :

$\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au dessus de } d \text{ pour } x \in]-\infty\,;\,-2[\,\cup\,]-1\,;\,2[\text{ et } \mathscr{C}_f \text{ est en dessous de } d \text{ pour } x \in]-2\,;\,-1[\,\cup\,]2\,;\,+\infty[}$

Exercice 4

1/ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}+2x} = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2+1=+\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+1}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty\end{array}\right\} \text{donc } \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0}.$$

La droite d'équation $y=0$ est donc asymptote à $\mathscr{C}_f$.

2/ $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^2+1=+\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+1}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -2x=+\infty\end{array}\right\} \text{donc } \boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}.$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ d(x) = f(x)-(-4x) = \sqrt{4x^2+1}+2x = \dfrac{\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}+2x} = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}-2x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^2+1=+\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+1}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -2x=+\infty\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}-2x}=0.$$

$\boxed{\text{La droite } d \text{ d'équation } y=-4x \text{ est donc asymptote à } \mathscr{C}_f \text{ en } -\infty.}$

3/ $\forall x \in \mathbb{R},\ d(x) = \sqrt{4x^2+1}+2x = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}-2x}$.

La première écriture nous montre que $d(x)$ est positif sur $\mathbb{R}^+$ et la deuxième que $d(x)$ est positif sur $\mathbb{R}^-$. $d(x)$ est donc positif sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est toujours au dessus de } d}$.