Devoir surveillé n° 3

Terminale 7 S - 2010/2011

12 novembre 2010 – Durée : 2 heures

Exercice 1 **4 points**

1. Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :
   a) $f(x) = (x^2+1)(x^3+3x-5)^4$ sur $\mathbb{R}$;
   b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-3x-6}}$ sur $]-\infty\,;-2[$.
2. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2+3x+8}{x(x+2)^2}$$

   a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x de $]0\,;+\infty[$:

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{(x+2)^2}$$

   b) En déduire la primitive F de f sur $]0\,;+\infty[$ telle que $F(1) = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 2 **2 points**

Déterminer la limite de f en a dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{x - x\ln x + 1}{x\ln x + 5}$, $a = +\infty$
2. $f(x) = \dfrac{\ln(1+3x)}{\ln(1+2x)}$, $a = 0$

Exercice 3 **3 points**

Résoudre l'équation et l'inéquation ci-dessous :

1. $(E) : -(\ln x)^2 - \ln x + 6 = 0$
2. $(I) : \ln(x-3) + \ln(2x+1) \leqslant 2\ln 2$

Exercice 4 **3 points**

Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$$

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout réel x :

$$P(x) = (x+2)(ax^2+bx+c)$$

2. Étudier le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$(E) : \ln(x^2+1) + \ln(2x-1) \leqslant \ln(3x+1) + \ln 5$$

Exercice 5 — 8 points

Partie A

Soit f la fonction définie sur $I =]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - x - \ln x$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de I.
2. Étudier les variations de f.
3. Montrer que l'équation (E) : $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans I. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. Déterminer le signe de $f(x)$ sur I.

Partie B

Soit g la fonction définie sur I par :

$$g(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(2 - \ln x)$$

1. Déterminer les limites de g aux bornes de I.
2. Justifier que g est dérivable sur I puis montrer que, pour tout x de I :

$$g'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$$

3. Étudier les variations de g.
4. En utilisant l'égalité $f(\alpha) = 0$, exprimer $\ln(\alpha)$ en fonction de α. En déduire que :

$$g(\alpha) = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$$

5. Déduire de l'égalité précédente un encadrement de $g(\alpha)$ d'amplitude 0,02.
6. Éudier le signe de $g(x)$ sur I.