Devoir surveillé n° 3

Terminale 7 S - 2010/2011

Éléments de correction

Exercice 1

1. a) $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{3}(3x^2+3)(x^3+3x-5)^4 = \frac{1}{3}u'(x)(u(x))^4 \quad \text{avec} \quad u(x) = x^3+3x-5$$

Les primitives de f sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \times (x^3+3x-5)^5 + C = \boxed{\frac{1}{15} \times (x^3+3x-5)^5 + C \qquad C \in \mathbb{R}}$$

b) $\forall x \in]-\infty; -2[$:

$$f(x) = -\frac{1}{3} \times \frac{-3}{\sqrt{-3x-6}} = -\frac{1}{3} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \quad \text{avec} \quad u(x) = -3x-6$$

Les primitives de f sont les fonctions F définies sur $]-\infty; -2[$ par :

$$F(x) = -\frac{1}{3} \times 2\sqrt{-3x-6} + C = \boxed{-\frac{2}{3}\sqrt{-3x-6} + C \qquad C \in \mathbb{R}}$$

2. a) $\forall x \in]0; +\infty[$:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{(x+2)^2} = \frac{a(x+2)^2+bx}{x(x+2)^2} = \frac{ax^2+4ax+4a+bx}{x(x+2)^2} = \frac{ax^2+(4a+b)x+4a}{x(x+2)^2}$$

On a donc :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{(x+2)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 4a+b = 3 \\ 4a = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \end{cases}$$

Ainsi, $\forall x \in]0; +\infty[$:

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{x} - \frac{5}{(x+2)^2}}$$

b) Les primitives de f sont donc les fonctions F définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$F(x) = 2\ln x + \frac{5}{x+2} + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

De plus :

$$F(1) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2\ln(1) + \frac{5}{3} + C = \frac{2}{3} \Leftrightarrow C = -1$$

Conclusion : F est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\boxed{F(x) = 2\ln x + \frac{5}{x+2} - 1}$$

Exercice 2

1. $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ f(x) = \dfrac{x\ln x\left(\frac{1}{\ln x} - 1 + \frac{1}{x\ln x}\right)}{x\ln x\left(1+\frac{5}{\ln x}\right)} = \dfrac{\frac{1}{\ln x} - 1 + \frac{1}{x\ln x}}{1+\frac{5}{\ln x}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty \quad \text{donc} \quad \left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} - 1 + \frac{1}{x\ln x} = -1 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{5}{x\ln x} = 1 \end{array}\right\} \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1}$$

2. $\forall x \in \mathscr{D}_f \setminus \{0\},\ f(x) = \dfrac{\ln(1+3x)}{3x} \times \dfrac{2x}{\ln(1+2x)} \times \dfrac{3}{2}$

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x\to 0} 3x = 0 \\ \displaystyle\lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \end{array}\right\} \text{donc} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{3x} = 1. \text{ De même} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\ln(1+2x)} = 1$$

Ainsi : $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = \dfrac{3}{2}}$

Exercice 3

1. Domaine de validité de (E) : $\mathscr{D}_1 =]0\,;+\infty[$

Sur $\mathscr{D}_1$, on a les équivalences suivantes :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} X = \ln x \\ -X^2 - X + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{(...calculs à faire...)} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \ln x \\ X = 2 \text{ ou } X = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \ln x = 2 \text{ ou } \ln x = -3$$

$$\Leftrightarrow x = \mathrm{e}^2 \text{ ou } x = \frac{1}{\mathrm{e}^3}$$

Conclusion : $\boxed{\mathscr{S}_1 = \left\{\mathrm{e}^2 ; \dfrac{1}{\mathrm{e}^3}\right\}.}$

2. Domaine de validité de (I) : $\mathscr{D}_2 =]3\,;+\infty[$

Sur $\mathscr{D}_2$, on a les équivalences suivantes :

$(I) \Leftrightarrow \ln(x-3)(2x+1) \leqslant \ln 2^2 \Leftrightarrow (x-3)(2x+1) \leqslant 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 7 \leqslant 0$

L'étude du signe du polynôme du second degré ci-dessous donne (sur $\mathscr{D}_2$) : $I \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant \dfrac{7}{2}$

Conclusion : $\boxed{\mathscr{S}_2 = \left]3 ; \dfrac{7}{2}\right]}$

Exercice 4

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+2)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx + 2ax^2 + 2bx + 2c = ax^3 + (2a+b)x^2 + (2b+c)x + 2c$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad P(x) = (x+2)(ax^2+bx+c) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad 2x^3 - x^2 - 13x - 6 = ax^3 + (2a+b)x^2 + (2b+c)x + 2c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = -1 \\ 2b + c = -13 \\ 2c = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = -3 \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x+2)(2x^2 - 5x - 3)}$

2. P est le produit d'une fonction affine et d'un polynôme du second degré dont les racines (à calculer) sont $-\frac{1}{2}$ et 3.
   On obtient donc le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $2x^2-5x-3$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Domaine de validité de (E) : $\mathscr{D} = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$
   Sur $\mathscr{D}$, on a les équivalences suivantes :
   $(E) \Leftrightarrow \ln(x^2+1)(2x-1) \leqslant \ln(5(3x+1)) \Leftrightarrow (x^2+1)(2x-1) \leqslant 5(3x+1) \Leftrightarrow 2x^3-x^2+2x-1 \leqslant 15x+5 \Leftrightarrow P(x) \leqslant 0$
   Conclusion : $\boxed{\mathscr{S} = \left]\frac{1}{2};3\right]}$

Exercice 5

Partie A

1. $$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0} 3-x = 3 \\ \lim\limits_{x\to 0} -\ln x = +\infty\end{array}\right\} \text{donc, par somme, } \boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty}$$
   $$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to +\infty} 3-x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} -\ln x = -\infty\end{array}\right\} \text{donc, par somme, } \boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty}$$

2. f est dérivable sur I (c'est une somme de fonctions dérivables) et, pour tout x de I : $f'(x) = -1-\frac{1}{x}$
   $f'(x)$ est strictement négatif sur I (c'est une somme de nombres strictement négatifs) donc :
   $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } I.}$

3. $$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f \text{ est continue sur } I \text{ (elle est dérivable sur } I\text{) ;} \\ \bullet\ f \text{ est strictement décroissante sur } I \text{ ;} \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty \text{ ;} \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty.\end{array}\right\} \text{donc } f \text{ réalise une bijection de }]0;+\infty[\text{ sur } \mathbb{R}.$$
   Ainsi $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ dans } I}$
   À la calculatrice, on obtient : $\boxed{2{,}20 \leqslant \alpha \leqslant 2{,}21}$.

4. f est strictement décroissante sur I et s'annule en α donc :
   $\boxed{\forall x \in]0;\alpha[,\ f(x) > 0}$ et $\boxed{\forall x \in]\alpha;+\infty[,\ f(x) < 0}$

Partie B

1. $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0} 1-\dfrac{1}{x}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} 2-\ln x=+\infty\end{array}\right\}$ donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty}$.

   $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to +\infty} 1-\dfrac{1}{x}=1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} 2-\ln x=-\infty\end{array}\right\}$ donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=-\infty.}$

2. g est dérivable sur I car c'est un produit de fonctions dérivables et, pour tout x de I :
$$g'(x)=\frac{1}{x^2}\times(2-\ln x)+\left(1-\frac{1}{x}\right)\times\frac{-1}{x}=\frac{2-\ln x-x+1}{x^2}=\frac{3-x-\ln x}{x^2}\boxed{=\frac{f(x)}{x^2}}$$

3. g' est du signe de f sur I. On obtient donc le tableau suivant :

x	0		α		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de g	|| $-\infty$	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

4. $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow 3-\alpha-\ln(\alpha)=0 \Leftrightarrow \ln(\alpha)=3-\alpha$.
On en déduit :
$$g(\alpha)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(2-\ln(\alpha))=\frac{\alpha-1}{\alpha}\times(2-(3-\alpha))=\frac{\alpha-1}{\alpha}\times(\alpha-1)=\boxed{\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}}$$

5. D'une part $2{,}20\leqslant\alpha\leqslant 2{,}21 \Rightarrow 1{,}20\leqslant\alpha-1\leqslant 1{,}21 \Rightarrow 1{,}20^2\leqslant(\alpha-1)^2\leqslant 1{,}21^2$ car la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
D'autre part $2{,}20\leqslant\alpha\leqslant 2{,}21 \Rightarrow \dfrac{1}{2{,}21}\leqslant\dfrac{1}{\alpha}\leqslant\dfrac{1}{2{,}20}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
En effectuant le produit de ces deux inégalités de réels positifs, on obtient : $\dfrac{1{,}20^2}{2{,}21}\leqslant g(\alpha)\leqslant\dfrac{1{,}21^2}{2{,}20}$.
Comme $0{,}65\leqslant\dfrac{1{,}20^2}{2{,}21}$ et $\dfrac{1{,}21^2}{2{,}20}\leqslant 0{,}67$, on peut conclure que : $\boxed{0{,}65\leqslant g(\alpha)\leqslant 0{,}67}$

6. On peut obtenir le signe de $g(x)$ sur I à partir des variations de g et de ses racines. On doit donc résoudre $g(x)=0$.
$$g(x)=0\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{x}\right)(2-\ln x)=0\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}=0 \text{ ou } 2-\ln x=0\Leftrightarrow\frac{1}{x}=1 \text{ ou } \ln x=2\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=\mathrm{e}^2$$
Le signe de $g(x)$ est donné dans le tableau suivant :

x	0		1		α		e^2		$+\infty$
Variations de g	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
Signe de $g(x)$	||	$-$	0		$+$		0	$-$	